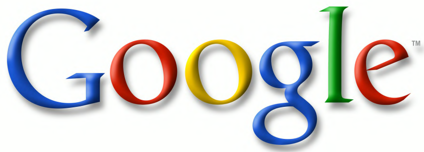
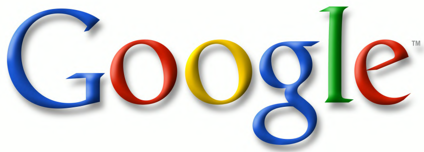
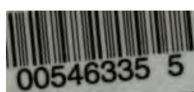
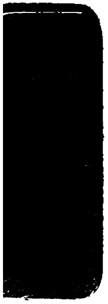
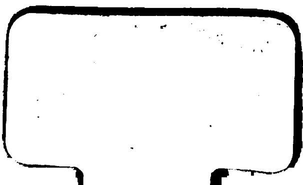

Google




00546335 5





GRUNDZÜGE

DER

ASTRONOMISCH-GEOGRAPHISCHEN ORTSBESTIMMUNG

AUF FORSCHUNGSREISEN

UND

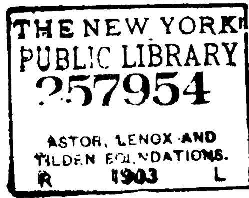
DIE ENTWICKELUNG DER HIERFÜR MASSGEBENDEN MATHEMATISCH-GEOMETRISCHEN BEGRIFFE

VON

PROF. DR. PAUL GÜSSFELDT

MIT 95 EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN
1903



VORWORT.

I.

In den Lehrbüchern, welche eine exacte Darstellung der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung geben, wird dasjenige mathematische Wissen vorausgesetzt, dessen der Leser zum Verständnifs bedarf.

Einen anderen Standpunkt habe ich in den vorliegenden „Grundzügen“ eingenommen, wie in dem Titel des Buches angedeutet ist. Es werden darin zunächst die mathematischen Grundbegriffe entwickelt, und es wird gezeigt, in welchem Zusammenhang Mathematik und exacte Wissenschaften überhaupt stehen; denn zu letzteren gehört die Theorie der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung. Erst dann folgt die Behandlung der Aufgabe selbst, mit der Beschränkung, welche der besondere Zweck des Buches wünschenswerth macht.

Durch die angedeutete Form der Darstellung habe ich eine Antwort auf die Frage zu geben versucht: wie läfst es sich in Rücksicht auf die meist unzureichenden und selten mit voller Klarheit erfafsten mathematischen Kenntnisse der angehenden akademischen Jugend erreichen, dafs jeder Student dieses Buch versteht, auf Grund der gesicherten allgemeinen Bildung, welche er der Schule verdankt?

Die Thatsache, dafs die mathematische Bildung der Abiturienten im Allgemeinen nicht dem Umfang der mathematischen Kenntnisse entspricht, welche bei der Schlufsprüfung gefordert werden, hat nichts Ueberraschendes. Die echte mathematische Befähigung ist erfahrungsmäfsig etwas Besonderes, so gut wie die musikalische; und es braucht sich Niemand zu schämen, wenn er weder die eine, noch die andere besitzt. Einer specifisch

mathematischen Befähigung bedarf es nun, wenn der zehn- bis zwölfjährige Knabe auf der Schule in die Mathematik eingeführt werden soll, wenn seinem Intellect der Sprung aus der vertrauten Welt des Concreten in die ungreifbare fremdartige Welt des Abstracten gelingen soll. Denn sowohl die Grundlagen der Analysis, d. h. der reinen Mathematik, wie auch die der Geometrie sind Abstractionen des Verstandes aus sinnlichen Wahrnehmungen und fordern einen geistigen Procefs, welcher auf Uebung der Sinne und des Intellects gegründet ist. Uebung aber, wenn sie ihr Ziel nicht verfehlen soll, erfordert Zeit, und das Mafs dafür ist uns ebenso zugemessen, wie der Frucht die Reifezeit.

Deshalb bleibt in Bezug auf die Grundlagen der Mathematik dem Knaben noch versagt, was erst dem geistig gekräftigten Jüngling beschieden ist. Andererseit ist es nothwendig, zum Mindesten wünschenswerth, dafs der mathematische Unterricht auf der Schule frühzeitig beginnt. Denn die Grunderkenntnisse der Mathematik, wenn sie lediglich als unanfechtbare Thatsachen gelehrt werden, die Anwendung der Rechenregeln und Alles, was später routinemäfsig bei der Behandlung mathematischer Probleme gebraucht werden soll, prägen sich am festesten ein im Alter von 12 bis 16 Jahren. Das Weiterschliefsen aus den als unanfechtbar geltenden Grundlagen ist häufig leichter als das Begreifen der letzteren; deshalb kann der Unterricht allmählich mehr und mehr den wissenschaftlichen Charakter strenger Schlufsfolge erhalten.

In den mittleren Klassen kommt es vor Allem darauf an, dafs die Freude der Schüler an der mathematischen Beschäftigung wach gerufen und auch wach erhalten werde. Diese Freude ist aber ausschliefslich an das Begreifen der geforderten Schlüsse gebunden, und von diesem Gesichtspunkte aus erachte ich es als das kleinere Uebel, wenn schwierige Beweise unterdrückt werden und nur das Resultat, der „Satz“, mitgetheilt wird. Es können dann alle strebsamen Schüler von Durchschnittsbegabung auf der Höhe des Verständnisses bleiben, ihr Selbstvertrauen wird sich befestigen und ihre scheue Furcht vor der mathematischen Unterrichtsstunde in gleichem Mafse schwinden.

So vorbereitet, im Besitz eines Gemisches von Kenntnissen und Erkenntnissen, tritt der älter gewordene, d. h. reifere Schüler

in die Unterprima ein. Hier erst kann seinem mathematischen Wissen die wissenschaftliche Weihe gegeben, das Fundament der Analysis neu gelegt, der zuvor häufig geforderte Autoritätsglaube durch zwingende Einsicht ersetzt werden. Der Vorstellung, welche ich mir von einem solchen Unterricht gebildet habe, entsprechen die ersten Abschnitte der vorliegenden „Grundzüge“. Der Unterprima würde also die schöne Aufgabe der Begründung und Recapitulation des bei den Schülern vorhandenen mathematisch-geometrischen Wissensstoffes zufallen, und der Unterricht in der Oberprima könnte streng mathematisch und doch allen Schülern verständlich eingerichtet bleiben.

Der mathematische Unterricht stellt die Schule vielleicht vor ihre schwierigste Aufgabe. Derartige Aufgaben können wohl nie zu allgemeiner Befriedigung gelöst werden; aber die Kunst der Pädagogik und ihre treue Fürsorge für die heranzubildende Jugend ist wenigstens im Stande, mehr und mehr die Zahl derjenigen Schüler zu vermindern, welche lernten, ohne zu verstehen, und deren mathematische Thätigkeit in der tastenden Handhabung unbegriffener Kenntnisse bestand.

Ein klares Erfassen der natürlichen Zahlen, der mit ihnen ausführbaren Zählungsoperationen, der verschiedenen daraus hervorgehenden Zahlenarten, der Bedeutung aller Operationszeichen kann von jedem Schüler gefordert werden, wenn er die höhere Schule verläſst. Das sind Begriffsverbindungen, welche zur Grundlage der heute zu fordernden allgemeinen Bildung gehören. Anwendungen der Analysis bleiben im späteren Leben Niemandem erspart; sie werden in praxi ausgeführt durch mechanische Anwendung der Rechenregeln, durch gedächtniſsmäſsiges Einprägen gewisser Rechenresultate, wie z. B. $2+7=9$, $8\times 3=24$ u. s. w.; aber das genügt doch nicht für wahre Bildung, bei welcher die Frage Warum? eine ausschlaggebende Rolle spielt. Gerade weil uns die Grenzen des Erkennens so eng gezogen sind, daſs wir die Vorgänge der Welt in uns und auſser uns im besten Falle gesetzmäſsig beschreiben können, ist es doch von höchster Bedeutung, daſs wir wenigstens in der abstracten Welt der Zahlen auf eine Frage Warum? und das an die Antwort geknüpfte zweite Warum? so oft antworten können, bis wir zu dem gesicherten Fundament der Analysis gelangt sind.

Das hat etwas Erhebendes und giebt der Mathematik ihre besondere Stellung zu allen anderen Wissensgebieten. Jeder Gebildete sollte im Stande sein zu erkennen, welche Kraft des Ausdrucks den mathematischen Hieroglyphen innewohnt, und dass letztere ebenso hohe Aesthetik, wenn auch anderer Art, besitzen, wie die herrlichste Cultursprache. Was für letztere der Wortschatz und die Grammatik sind, das sind für die Analysis der Zahlenschatz und die Gesetze der mathematischen Operationen. Die mathematische Sprache allein vermag den Ueberlegungen und Resultaten der exacten Wissenschaften einen Ausdruck zu verleihen, welcher die verwickeltsten Beziehungen so durchsichtig und knapp darstellt, dafs Intellect und Empfinden gleichzeitig befriedigt werden.

II.

In den einleitenden Abschnitten der vorliegenden „Grundzüge“ habe ich versucht, die Grundlagen der Analysis so darzustellen, dafs ein normaler Intellect sie begreifen mufs. Auch die Ausgangspunkte der Geometrie finden Berücksichtigung. Aber in allen Fällen ist die Voraussetzung gemacht, dafs der Leser den mathematischen Unterricht einer höheren Schule genossen hat. Im Hinblick auf das Ziel, welches in dem Buche erstrebt wird, ist der Begriff der analytischen Geometrie und der Coordinatensysteme, welche in der sphärischen Astronomie und ihrer Anwendung auf Ortsbestimmung eine Rolle spielen, auseinandergesetzt worden. Die Definition der trigonometrischen Functionen ist aus der gleichzeitigen Verwerthung zweier verschiedener Coordinatensysteme hergeleitet worden, und es entsprach den pädagogischen Zielen dieses Buches, dafs bei der Betrachtung der sphärischen Dreiecke und der für sie geltenden Grundgleichungen keine Lücke bliebe.

Lehrbücher, welche dieselbe Disciplin behandeln, können sehr verschieden geartet sein, je nach dem Leserkreis, für welchen sie bestimmt sind.

Dieses Buch ist für einen Leserkreis bestimmt, welcher früher so gut wie gar nicht vorhanden war, für Leute, welche in un-

bekannten Ländergebieten reisen und ihren kartographischen Skizzen die sichere Grundlage astronomisch bestimmter Punkte geben sollen. Die kleine Zahl von Forschungsreisenden, welche noch bis vor ein oder zwei Jahrzehnten die hierfür nothwendigen Präcisionsinstrumente nicht nur besafsen, sondern auch zu handhaben und richtig zu verwerthen wufsten, liefs es überflüssig erscheinen, dafs für sie ein besonderes Werk verfafst wurde; meist waren es jüngere Naturforscher, welche vor der Ausreise Mittel und Wege fanden, sich auf einer Sternwarte vorzubereiten.

Heute liegt die Sache anders: das Vorhandensein deutscher Colonien, das Schwinden der Befangenheit vor fremder Ferne, die leichtere Beschaffung von Hilfsmitteln an allen Punkten, welche von Schiffen angelaufen werden, hat Anlafs zu vielen Forschungsreisen gegeben, die sonst wohl unterblieben wären. Dadurch hat sich die Zahl derer vermehrt, an welche der Wunsch oder gar die Nothwendigkeit herantritt, brauchbare Ortsbestimmungen mit Hilfe der Astronomie auszuführen.

Ein solcher Wunsch kann aber nicht ohne vorangegangene Arbeit befriedigt werden; denn die Theorie der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung ist eine mathematische Disciplin, verlangt also sicheres Beherrschen der mathematischen Schulkenntnisse; die Handhabung der Instrumente und ihr Gebrauch zu Beobachtungen verlangen Routine, also angemessene Zeit zur Uebung. Das galt bei den Forschungsreisenden alten Stils als selbstverständlich; denn die meisten hatten akademische Bildung, kannten den Ernst wissenschaftlicher Arbeit und wurden lediglich durch ihren Wissensdrang und kühnen Sinn veranlafst, in die Weite zu ziehen. Bei der neuen Generation liegt es nicht ganz so; hier wirken theilweise andere Motive, und unter der Ungeduld des Thatendranges leidet die Einsicht in die Nothwendigkeit einer arbeitsvollen Vorbereitung. Es ist nicht nöthig, dafs ein Jeder, der auf fremdem Boden steht, Ortsbestimmungen vornimmt; aber wer diesen Anspruch erhebt, soll auch dazu berechtigt sein und gute Beobachtungen liefern; denn schlechte sind schlimmer als keine.

Aus den Vorlesungen, welche ich während der letzten zehn Jahre am Seminar für Orientalische Sprachen zu Berlin gehalten habe, ist dieses Buch entstanden; es ist weder für junge Mathe-

matiker noch für junge Astronomen bestimmt, sondern für Forschungsreisende, wie ich selbst einer war. Deshalb sind nur diejenigen Methoden aufgenommen, welche den Verhältnissen auf Reisen am besten entsprechen. Auch ist, in Rücksicht auf die Leistungsfähigkeit leicht transportabler Universalinstrumente und deren bequemeren Gebrauch, von den Reflexionsinstrumenten (Sextant, Prismenkreis) ganz abgesehen worden; mit anderen Worten: es ist diejenige Auswahl getroffen worden, auf welche man durch Beobachtungserfahrung auf Reisen von selbst geführt wird. Auch die Rathschläge, welche auf das Verhalten des Reisenden während der Beobachtungen Bezug haben, gründen sich lediglich auf meine persönlichen Erfahrungen im tropischen Afrika, in der Arabischen (ostägyptischen) Wüste und in den Andes von Chile und Argentinien.

Bei der Darstellung bin ich mir stets der besonderen Verantwortung bewufst geblieben, welche jeder Verfasser eines Lehrbuches einzulösen hat. Ein Lehrbuch soll nicht nur belehrend, sondern auch anregend wirken; es soll dem Leser das Grübeln fernhalten, das selbständige Weiterdenken nahelegen. Dies ist nur erreichbar, wenn der Verfasser mit unbestechlicher Gewissenhaftigkeit nach höchster Klarheit des Ausdrucks und des Ideenganges gestrebt hat. Dann wird es den ernsthaften Leser in Stand setzen, andere Bücher zu verstehen, welche dieselbe Materie vollständiger, aber unter Voraussetzung erweiterter Vorkenntnisse behandeln. Deshalb glaube ich, dafs dieses Buch auch solchen jungen Akademikern nützlich werden kann, welche sich dem Studium irgend einer exacten Wissenschaft widmen wollen.

Im Besonderen möchte ich an die Vertreter der Geographie auf unseren deutschen Universitäten die Bitte richten, die vorliegenden „Grundzüge“ einer Prüfung zu unterziehen. Denn es ist wohl nicht zu leugnen, dafs die mehrfach wiederholten Versuche, die Disciplin der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung in die knappe Form einer „Anleitung“ zu zwängen, dem Zweck nicht entsprochen haben. Das Bedürfnifs nach einer neuen Darstellungsform lag also vor.

Aufserdem ist die Kartographie die Grundlage nicht nur für die beschreibende Erdkunde, sondern auch für die Behandlung anderer Disciplinen nach geographischen Gesichtspunkten. Die

geographischen Karten sind Abbildungen von Theilen der Erdoberfläche auf einer Ebene; die Kartenprojection ist also ein specieller Fall des allgemeinen analytisch-geometrischen „Abbildungsproblems"; in ihr spielen die Begriffe der geographischen Länge und Breite eine maſsgebende Rolle. Die „Grundzüge" könnten also dazu beitragen, den Studirenden der Geographie die Vertiefung in das Problem der Kartenprojection zu erleichtern.

Von jedem Bogen wurden vier Correcturen gelesen, die zweite gleichzeitig von meinem Collegen Herrn Prof. M. Schnauder, dessen groſse Mühewaltung mich zu lebhaftestem Dank verpflichtet hat.

Die Verlagsbuchhandlung ist allen meinen Wünschen in so hohem Maſse entgegengekommen, daſs ich meinem Dank dafür auch an dieser Stelle Ausdruck geben möchte.

Paul Güſsfeldt.

INHALTSVERZEICHNISS.

Erster Abschnitt.

Die Elemente der reinen Mathematik oder Analysis.

Zweiter Abschnitt.

Räumliche Vorstellungen.

Dritter Abschnitt.

Die thatsächlichen Grundlagen der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung.

Vierter Abschnitt.

Zeit und Zeitmessung.

Fünfter Abschnitt.

Die sphärischen Dreiecke und ihre Eintheilung. Sphärische Trigonometrie. Allgemeingiltigkeit der Grundformeln für die Gesammtheit der sphärischen Dreiecke. Anwendung auf das astronomische Dreieck.

Sechster Abschnitt.

Das Universalinstrument (U. I.) und seine Fehlertheorie.

Siebenter Abschnitt.

Messungsmethoden für Zeit, Polhöhe und Azimut.

Achter Abschnitt.

Von den Bedingungen, unter welchen ein Fehler in den Stücken φ, δ, z, a, t des astronomischen Dreiecks den geringsten Einflufs übt auf das zu berechnende Stück der Zeit, der Polhöhe, des Azimuts.

Neunter Abschnitt.

Das Nautische Jahrbuch (N. J.) und der Gebrauch fünfstelliger Logarithmentafeln.

Zehnter Abschnitt.

Beispiele für das Berechnen angestellter Beobachtungen.

Elfter Abschnitt.

Meridianellipse und Gestirnsparallaxe.

Zwölfter Abschnitt.

Die Methoden der Längenbestimmung.

Anhang.

Erster Abschnitt.

Die Elemente der reinen Mathematik oder Analysis.

Das Zählen und die Anzahl.

1. Der Verkehr der Menschen untereinander hat schon in grauer Vergangenheit die Frage gezeitigt, durch welche Merkmale Gruppen gleichartiger Dinge unterschieden werden können?

Die Antwort ist in der folgenden Ueberlegung eingeschlossen, bei welcher es auf die Gleichartigkeit nicht ankommt.

Betrachtet man eine Gruppe concreter Dinge nur in Rücksicht auf deren Existenz und ohne Rücksicht auf irgend welche anderen Eigenschaften, so bleibt der Gruppe ein unzerstörbares Merkmal, welches die *Anzahl* heifst und durch die *Operation des Zählens* ermittelt wird.

Das uneingeschränkte Zählen erfordert eine Reihe von Zeichen, welche nach einem aufzustellenden Gesetz zu einer unveränderlichen, nie abbrechenden Folge angeordnet sind, und deren jedes von dem anderen verschieden ist.

Alsdann läfst sich jedem Individuum der Gruppe successive ein Zählungszeichen, *der festgesetzten Folge nach*, zuordnen: *dieses Zuordnen heifst zählen.* Der Procefs ist zu Ende, sobald jedes Individuum zum Zählen herangezogen worden ist; *irgend eines* mufs *das letzte* sein und das *diesem* zugeordnete Zählungszeichen heifst die *Anzahl der die Gruppe bildenden Individuen.*

Es ist evident, dafs die Anzahl unverändert bleibt, in welcher Folge immer die Individuen zu dem Zählungsprocefs herangezogen werden mögen. Man sagt deshalb:

Die Anzahl gegebener Dinge ist unabhängig von der Art (Folge) *des Zählens.*

Die natürliche Zahlenreihe.

2. Diejenige Folge von Zählungszeichen, deren wir uns zum Zählen bedienen, heifst die *natürliche Zahlenreihe.* Wir bilden sie nach einem einfachen Gesetz aus den Zeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, welche *Ziffern* heifsen.

Der *Anfang* der natürlichen Zahlenreihe ist

I. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Aus ihr bilden wir mittels der Ziffern die Fortsetzung:

II.
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,
20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29,
30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39,
40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49,
50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59,
60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69,
70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79,
80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89,
90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99.

Das Bildungsgesetz ist klar; wendet man es auf die letztgebildete Gruppe selbst an, so erhält man die Zahlen von 100 bis 999; daraus die Zahlen 1000 bis 9999 u. s. f. *Die Reihe der natürlichen Zahlen kann also nie abbrechen*; denn aus jeder zuletzt gebildeten Gruppe entsteht eine neue mittels der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Wir würden deshalb im Stande sein, jede beliebige Gruppe zu zählen, wenn unsere Lebensdauer dies ermöglichte.

Mit welchem Namen die den Anfang der Zahlenreihe bildenden Individuen von 1 (eins) bis zu 1000000 (eine Million) oder bis zu 1000000000 (eine Milliarde) belegt werden, braucht hier nicht gesagt zu werden, weil Jedermann, der lesen und schreiben kann, dies weifs.

Wir unterscheiden die Zahlen als 1-, 2-, ...ziffrige Zahlen. Die Anzahl der Individuen der natürlichen Zahlenreihe, wenn man sie hinter der Zahl a abbricht, ist a; z. B. die Anzahl der Zahlen 1, 2, 3 ... 67 ist 67.

Die Zahlenfolge, welche durch das Bildungsgesetz bestimmt ist, soll die *positive oder wachsende Richtung* heifsen; die entgegengesetzte die *negative oder fallende Richtung.*

Die Einführung des geometrischen Begriffes „Richtung“ ist zwar keine Nothwendigkeit, aber eine Erleichterung für die Darstellung. Jede Gerade ist die Trägerin zweier entgegengesetzter Richtungen, welche *willkürlich als positive und negative Richtung* derselben unterschieden werden dürfen. Schreiten wir von irgend einem Punkte O der Geraden in positiver Richtung successive um gleiche Wegstücke fort, so liefern die Endpunkte dieser Wegstücke eine Folge von Punkten, denen wir die Folge der natürlichen Zahlen zuordnen wollen.

Sind nun a und b zwei Zahlen, und *liegt b in positiver Richtung von a*, so nennt man b *gröfser als a* ($b > a$); liegt dagegen *b in negativer Richtung von a*, so nennt man b *kleiner als a* ($b < a$).

Aus $a > b$ folgt stets $b < a$, und aus $a < b$ folgt $b > a$.

Die Addition.

3. Es seien a und b zwei natürliche Zahlen; aldann bedeutet $a + b$ eine mittels dieser Zahlen und der natürlichen Zahlenreihe auszuführende Zähloperation, welche zu einer neuen Zahl führt. Ist c diese Zahl, so schreibt man:

$$a + b = c$$

und spricht: a plus b gleich c.

Diese Operation heifst die *Addition der Zahl b zu der Zahl a* und besteht darin, dafs man von a aus die in positiver Richtung nächstfolgenden b Individuen der natürlichen Zahlenreihe abzählt und das letzte als das Resultat der Addition betrachtet. Ist dasselbe die Zahl c, so ist:

$$c = a + b.$$

Das Zeichen $+$ ist also ein Operationszeichen.

a und b heifsen die *Summanden*, c ihre *Summe.*

Unter

$$S = a + b + c + d$$

soll folgende Operation verstanden werden: man bildet $a + b = c'$, darauf $c' + c = d'$, darauf $d' + d$, und diese Zahl ist $= S$; die Definition läfst sich für beliebig viele Summanden erweitern.

Es ist stets

$$a = \overset{(1)}{1} + \overset{(2)}{1} + \cdots \overset{(a)}{1},$$

d. h. wenn eine Summe, deren Summanden sämmtlich $= 1$ sind, $= a$ ist, so besteht sie aus a Summanden; und wenn die Summe aus a Summanden 1 besteht, so ist sie $= a$.

Wenn in einer beliebigen Summe, z. B.

$$S = a + b + c + d,$$

jeder der Summanden a, b, c, d als Summe von a, b, c, d Summanden 1 dargestellt wird, so ist $S =$ der Anzahl der Summanden 1. Da es beim Zählen nicht auf die Folge der gezählten Objecte (hier die 1) ankommt, so kann man zuerst die durch b, dann die durch d, dann die durch a und endlich die durch c gelieferten Summanden 1 zählen. Es wird also

$$a + b + c + d = b + d + a + c.$$

Dies führt ohne Weiteres zu dem *Satz:*

Eine Summe bleibt unverändert, wenn man die Folge der Summanden beliebig ändert.

Die Subtraction und die Reihe der negativen ganzen Zahlen.

4. Die Operation der Addition $a + b$ besteht in einem Abzählen der b Individuen, welche auf a in *positiver* Richtung folgen. Statt dessen kann man die Zählrichtung auch *umkehren* und die in *negativer Richtung auf a folgenden b Individuen* abzählen. Ist d die Zahl, bei welcher die Zähloperation endet, so schreibt man:

$$a - b = d$$

und spricht: a minus b gleich d.

Diese Operation heifst die *Subtraction der Zahl b von der Zahl a*; d heifst die *Differenz von a und b*, a der *Minuendus*, b der *Subtrahendus*.

Da die bei a abgebrochene Zahlenreihe 1, 2, 3 ... a aus a Zahlindividuen besteht, so bleiben nur $(a - 1)$ Individuen für die negative Abzählung zur Verfügung; b darf also nicht gröfser sein als $a - 1$, d. h. es mufs stets sein $b < a$.

Damit nun $a - b$ auch dann noch eine Bedeutung habe, wenn $b > a$ ist, erfinden wir *neue Zeichen.* Dies ist um so weniger befremdlich, als ja die natürliche Zahlenreihe lediglich auch nur eine von uns gemachte Erfindung ist. Als negativen Nachbarn

der 1 setzen wir das Zeichen 0 (Null) und lassen darauf, ebenfalls in negativer Richtung, die Individuen der natürlichen Zahlenreihe folgen, setzen jedoch, der Unterscheidung wegen, vor jedes derselben das Zeichen —.

Die neu erfundenen Zeichen $\cdots -4, -3, -2, -1$ nennen wir die Reihe der *negativen Zahlen.* Dieselben theilen mit der Reihe der *natürlichen* Zahlen, welche im Gegensatz zu den negativen Zahlen auch *positive* Zahlen genannt werden, die Eigenschaft, dafs jedes Individuum *eine eindeutig bestimmte Stelle in der zugehörigen Zahlenreihe* einnimmt.

5. Wir wollen die *positive Zahlenreihe, die Null,* und *die negative Zahlenreihe* als die *vollständige ganze Zahlenreihe* bezeichnen. Denken wir uns die Individuen derselben in gleichen Abständen auf einer geraden Linie verzeichnet und nehmen wir die positive Richtung nach rechts, so würde die Zahlenreihe in der Nähe von 0 sein:

$$\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \cdots$$

Die natürlichen oder positiven Zahlen 1, 2, 3, ... werden auch durch $1 = +1$, $2 = +2$, $3 = +3 \ldots$ bezeichnet werden, wenn ihr Gegensatz zu den negativen Zahlen betont werden soll. Alsdann ist jede Zahl (mit Ausnahme der Null) durch eine *natürliche oder absolute Zahl* und *ein Zeichen* dargestellt; z. B. $+19$ und -19. Die natürliche Zahl heifst der *numerische Werth oder der absolute Betrag*; das davor befindliche Zeichen + oder — heifst das *Zeichen* der Zahl. Es hat also $+19$ den numerischen Werth 19 und das Zeichen +; dagegen -19 den absoluten Betrag 19, aber das Zeichen —.

Nunmehr führt jede Differenz $a - b$ zu einer Zahl. Ist $a > b$, so ist diese Zahl $+(a - b)$, wo $(a - b)$ ihr numerischer Werth, + ihr Zeichen ist; ist $a < b$, so ist diese Zahl $-(b - a)$, wo $(b - a)$ ihr numerischer Werth, — ihr Zeichen ist. Ist $a = b$, so wird $a - b = 0$. Denn wenn man, von a aus, a Zahlen in negativer Richtung abzählt, so gelangt man zu dem Zeichen 0.

Definition der Addition und Subtraction für zwei Individuen der vollständigen ganzen Zahlenreihe.

6. Verstehen wir unter $\tilde{a}$ irgend eine positive oder negative Zahl von dem numerischen Werthe a, und unter $\tilde{b}$ das Analoge in Bezug

auf den numerischen Werth b, so sind die gegebenen Definitionen für $a + b = (+a) + (+b)$ und für $a - b = +a - (+b)$ in der folgenden Definition enthalten:

Es soll bedeuten $\tilde{a} + \tilde{b}$ die Zahl, welche erreicht wird, wenn man von $\tilde{a}$ aus b Individuen der vollständigen Zahlenreihe in der durch *das Zeichen von* $\tilde{b}$ *gegebenen Richtung* abzählt; und $\tilde{a} - \tilde{b}$ die Zahl, welche erreicht wird, wenn man von $\tilde{a}$ aus b Individuen der vollständigen Zahlenreihe in der *dem Zeichen von* b *entgegengesetzten* Richtung abzählt. Dies liefert:

$$\tilde{a} + (-b) = \tilde{a} - (+b)$$
$$\tilde{a} - (-b) = \tilde{a} + (+b),$$

d. h. die Addition einer negativen Zahl $-b$ zu einer Zahl $\tilde{a}$ führt zu demselben Resultat, wie die Subtraction der positiven Zahl $+b$ von $\tilde{a}$; und die Subtraction der negativen Zahl $-b$ von $\tilde{a}$ führt zu demselben Resultat, wie die Addition der positiven Zahl $+b$ zu $\tilde{a}$.

Ist $\tilde{a} = 0$, so wird

$$0 + (+b) = +b$$
$$0 + (-b) = -b$$
$$0 - (+b) = -b$$
$$0 - (-b) = +b$$

Aus der Definition für $\tilde{a} \pm \tilde{b}$ folgt:

$$(\tilde{a} + \tilde{b}) - \tilde{b} = \tilde{a} \text{ und } (\tilde{a} - \tilde{b}) + \tilde{b} = \tilde{a},$$

d. h. unterwirft man eine Zahl $\tilde{a}$ mittels einer Zahl $\tilde{b}$ der *Addition, bezw. Subtraction*, und die daraus hervorgehende Zahl mittels derselben Zahl $\tilde{b}$ der *Subtraction, bezw. Addition*, so gelangt man wiederum zur Zahl $\tilde{a}$. Aus diesem Grunde heifsen Addition und Subtraction in Bezug aufeinander *umgekehrte Operationen.*

Aus der Definition folgt weiterhin, dafs eine *Summe beliebiger positiver und negativer Zahlen* (auch *Aggregat* genannt) *unverändert bleibt, wenn die Summanden beliebig miteinander vertauscht werden.* Dies ist also die Erweiterung des für positive Zahlen bereits erwiesenen Satzes.

Es ist nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, dafs die Zeichen $+$ und $-$ eine *doppelte* Bedeutung haben: einmal sind sie *Operationszeichen*, und haben alsdann die Namen plus und minus, das andere Mal sind sie *Unterscheidungszeichen*, welche den

natürlichen Zahlen vorgesetzt werden und diese dadurch zu positiven und negativen Zahlen machen; in diesem Falle heifst $+$ das positive Zeichen oder Zeichen plus, und $-$ das negative Zeichen oder Zeichen minus.

Wir nannten die natürliche (positive) Zahl b gröfser als die natürliche Zahl a und schrieben $b > a$, wenn die Zahl b in der positiven Zählungsrichtung von der Zahl a liegt; alsdann ist $b - a$ eine positive Zahl und $a - b$ eine negative. Diesen Begriff $b > a$, wenn $b - a$ positiv ist, $b < a$, wenn $b - a$ negativ ist, können wir auf zwei beliebige positive oder negative Zahlen $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$ übertragen und festsetzen, dafs $\tilde{b} > \tilde{a}$ heifsen soll, *wenn die Differenz $\tilde{b} - \tilde{a}$ eine positive Zahl ist, und $\tilde{b} < \tilde{a}$, wenn $\tilde{b} - \tilde{a}$ eine negative Zahl ist.*

Sämmtliche übrigen Folgerungen, welche sich aus dem bisher Gesagten ergeben, findet man in jedem Elementarbuche über die Buchstabenrechnung mit positiven und negativen Zahlen. Unsere Aufgabe beschränkt sich auf das rein Principielle der Definitionen, aus denen die „Rechnungsregeln“ ohne Weiteres fliefsen.

Die Multiplication.

7. Die Bestimmung einer *Summe*, welche aus einer *Anzahl* von n gleichen Summanden $\tilde{a}$ besteht, nennt man die *Multiplication der positiven oder negativen Zahl $\tilde{a}$ mit der natürlichen Zahl n.* $\tilde{a}$ heifst der *Multiplicandus*, kann also sowohl eine *positive wie negative Zahl sein*, n heifst der *Multiplicator* und ist eine absolute oder natürliche Zahl, eben deshalb, weil sie die *Anzahl einer Gruppe von Individuen $\tilde{a}$* ist.

Man schreibt abgekürzt:

$$\overset{(1)}{\tilde{a}} + \overset{(2)}{\tilde{a}} + \cdots \overset{(n)}{\tilde{a}} = \tilde{a} \,.\, n = \tilde{a}\, n$$

und nennt $\tilde{a} n$ das *Product der Zahl $\tilde{a}$ in die Anzahl n.*

Ist $\tilde{a} = +a$, so ist $\tilde{a} n = +(a n)$,
ist $\tilde{a} = -a$, so ist $\tilde{a} n = -(a n)$.

Sind a und b zwei natürliche ganze, d. h. positive Zahlen, so folgt aus der Definition der Addition:

$$\overset{(1)}{a} + \overset{(2)}{a} + \cdots \overset{(b)}{a} = \overset{(1)}{b} + \overset{(2)}{b} \cdots \overset{(a)}{b},$$

wenn die Summe links aus b Summanden a, die Summe rechts aus a Summanden b besteht. Mit anderen Worten: es ist

$$ab = ba.$$

Der Beweis beruht darauf, dafs man jeden Summanden a als eine Summe von a Summanden 1 darstellt und in b Horizontalreihen untereinander hinschreibt; dann enthält jede Verticalreihe b Summanden 1, und es ist a die Anzahl der Verticalreihen; die Summe ist also $= ba$.

Nach demselben Princip verfährt man, um nachzuweisen, dafs

$$(a + b)\,c = ac + bc$$
$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$
$$(a - b)\,c = ac - bc,$$
$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd,$$

falls $a > b$, $c > d$.

8. Die für $(a-b)(c-d)$ geltende Gleichung ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil sie als *Definition* der Multiplication gilt für den Fall, dafs entweder $a = b$, oder $c = d$, oder $c < d$, also $(c - d)$ negativ wird; denn in allen diesen Fällen *behält die rechte Seite einen Sinn, während die linke ihn verliert.*

Ist $a = b$, bezw. $c = d$, so wird die rechte Seite $= 0$. Daraus entnehmen wir die *Definitionsgleichungen*

$$0 . (c - d) = 0$$
$$(a - b) . 0 = 0,$$

wenn $(c - d)$ und $(a - b)$ positive Zahlen sind.

Setzt man nun in

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$$

successive

$b = 0$, $d = 0$, so entsteht $ac = ac$
$a = 0$, $d = 0$, „ „ $(-b)\,c = -(bc)$
$b = 0$, $c = 0$, „ „ $a\,(-d) = -(ad)$
$a = 0$, $c = 0$, „ „ $(-b)(-d) = +(bd)$.

Da a, b, c, d beliebige positive ganze Zahlen bedeuten, so dürfen wir die drei letzten Definitionsgleichungen schreiben: $(-a)(+b) = -(ab)$; $(+a)(-b) = -(ab)$; $(-a)(-b) = +(ab)$ und die erste in der Form $(+a)(+b) = +(ab)$

hinzufügen. Nennen wir also zwei Zahlen, welche im Vorzeichen übereinstimmen: *gleichstimmig*, und zwei Zahlen von entgegengesetztem Vorzeichen: *ungleichstimmig*, so erhalten wir als *Definitionsresultat:*

Das Product zweier Zahlen $\tilde{a}$ *und* $\tilde{b}$ *ist* $= +(a\,b)$, *wenn* $\tilde{a}$ *und* $\tilde{b}$ *gleichstimmig sind, und* $= -(a\,b)$, *wenn sie ungleichstimmig sind.*

Hieraus folgt: *ein Product zweier Zahlen* $\tilde{a}$ *und* $\tilde{b}$, *deren jede* $+$ *oder* $-$ *sein kann, bleibt dieselbe Zahl (ungeändert), wenn Multiplicandus und Multiplicator vertauscht werden.*

Aus diesem Grunde bezeichnet man Multiplicandus und Multiplicator eines Products mit einem *gemeinsamen Namen* und nennt jeden *einen Factor des Products.*

Die erhaltenen Definitionsgleichungen pflegen im Schulunterrichte in der Form eingeprägt zu werden:

plus mal plus gibt plus,
minus mal minus gibt plus,
plus mal minus gibt minus,
minus mal plus gibt minus.

Unter einem Product von beliebig vielen Factoren:

$$a\,b\,c\,d\,e \ldots$$

versteht man die Zahl, welche entsteht, wenn man bildet:

$$a\,b = c',\; c'c = d',\; d'd = e\ \ldots$$

Hier möge die Andeutung genügen, dafs *ein solches Product stets zu derselben Zahl führt, d. h. unverändert bleibt, wenn man die Factoren beliebig miteinander vertauscht.*

Tritt an Stelle von $a\,b\,c\,d\,e \ldots$ das Product $\tilde{a}\,\tilde{b}\,\tilde{c}\,\tilde{d}\,\tilde{e} \ldots$, wo jeder Factor $+$ oder $-$ sein darf, so ist der numerische Werth wiederum gleich $a\,b\,c\,d\,e \ldots$; das Zeichen ist $+$, wenn die Anzahl der negativen Factoren *gerade* ist, d. h. $=2$ oder $=$ einem Vielfachen von 2; das Zeichen ist $-$, wenn die Anzahl *ungerade* ist.

Theiler und ganzzahlige Quotienten.

9. Man nennt eine Zahl α einen *Theiler* einer Zahl a, wenn es eine ganze Zahl q gibt, für welche

$$a = q\,\alpha$$

wird. q heifst der *Quotient* von a in Bezug auf den Theiler α und wird bezeichnet mit $\frac{a}{\alpha}$, so dafs also

$$a = \frac{a}{\alpha}\,\alpha$$

die *Definitionsgleichung* für $\frac{a}{\alpha}$ ist. $\frac{a}{\alpha}$ wird ausgesprochen „a durch α", a heifst der *Zähler*, α der *Nenner* des Quotienten; das Zeichen $\frac{a}{\alpha}$ bedeutet also die Zahl, welche, mit dem Nenner multiplicirt, den Zähler hervorbringt.

Das Auffinden der Zahl $\frac{a}{\alpha}$, aus a und α, heifst die *Division der Zahl a durch die Zahl α.* Allgemein soll die *Division* einer beliebigen Zahl A durch eine beliebige Zahl B das Auffinden einer Zahl C bedeuten, welche der Gleichung genügt $A = B\,C$; das Zeichen der Division ist $A:B$ (A dividirt durch B); es ist also:

$$A = (A:B)\,B.$$

A heifst der *Dividendus*, B der *Divisor.* So lange wir nichts anderes kennen, als ganze Zahlen, ist eine Division nur dann möglich, wenn der Divisor ein Theiler des Dividendus ist.

Diese Annahme wird deshalb zunächst für $a:\alpha$ gemacht. Alsdann läfst sich die Zahl $q = \frac{a}{\alpha}$ finden, für welche $a = q\,\alpha$ ist. Denn alle Zahlen, für welche α ein Theiler ist, müssen in der Reihe $[R\alpha]$ enthalten sein, welche durch Multiplication jedes Individuums der natürlichen Zahlenreihe R mit α entstehen soll.

Die Division $a:\alpha$ wird also darin bestehen, dafs man die Glieder der Reihe $[R\alpha]$ bildet, bis das Individuum a zum Vorschein kommt. Die Anzahl der gebildeten Glieder ist alsdann gleich q; die Division $a:\alpha$ ist also ein *Zählungsprocefs.*

Wenn α ein Theiler von a ist, so sollen die Zeichen $\frac{-a}{\alpha}$, $\frac{a}{-\alpha}$ und $\frac{-a}{-\alpha}$ diejenigen Zahlen bedeuten, aus denen durch Multiplication mit dem Nenner der Zähler hervorgeht. Dem entsprechend wird:

$$\frac{-a}{\alpha} = -\frac{a}{\alpha},\ \frac{a}{-\alpha} = -\frac{a}{\alpha},\ \frac{-a}{-\alpha} = \frac{a}{\alpha}.$$

Es ist $1 . a = a$, folglich $1 = \frac{a}{a}$; es ist $a . 1 = a$, folglich $a = \frac{a}{1}$.

Das Rechnen mit ganzen Zahlen, welche in Quotientenform gegeben sind.

10. Sind $\frac{a}{\alpha}$ und $\frac{b}{\beta}$ zwei ganze Zahlen, so liefert die Anwendung von $\frac{a}{\alpha}\,\alpha = a$ und $\frac{b}{\beta}\,\beta = b$ Ausdrücke für die ganzen Zahlen $\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta}$, $\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}$, $\frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta}$, welche gleichfalls Quotientenform besitzen.

Wir dürfen schreiben:

$$p = \frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta}\,\alpha\,\beta = \left(\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta}\right)(\alpha\,\beta) = \left(\frac{a}{\alpha}\,\alpha\right)\left(\frac{b}{\beta}\,\beta\right) = (a\,b).$$

Es ist also:

$$p = \left(\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta}\right)(\alpha\,\beta),$$

d. h. p hat den Theiler $(\alpha\,\beta)$; also wird der andere Factor $\left(\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta}\right)$ des zweigliedrig aufgefaſsten Productes p mit $\frac{p}{\alpha\beta}$ bezeichnet, oder weil $p = a\,b$ ist, mit $\frac{ab}{\alpha\beta}$.

Folglich wird:

$$\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta} = \frac{a\,b}{\alpha\,\beta}.$$

Für $b = \beta$ wird $\frac{b}{\beta} = 1$ und

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{a\,\beta}{\alpha\,\beta}.$$

Die letzte Gleichung gestattet zu schreiben:

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} = \frac{a\,\beta}{\alpha\,\beta} + \frac{b\,\alpha}{\alpha\,\beta};$$

da eine Gleichung $x = y$ stets zur Folge hat: $xz = yz$, so ist

$$\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right)\alpha\,\beta = \frac{a\,\beta}{\alpha\,\beta}\,\alpha\,\beta + \frac{b\,\alpha}{\alpha\,\beta}\,\alpha\,\beta = a\,\beta + b\,\alpha.$$

Die Zahl $a\beta + b\alpha$ ist also dargestellt als Product zweier Factoren, deren einer $\alpha\beta$ ist, folglich ist der andere $\frac{a\beta + b\alpha}{\alpha\beta}$; dieser ist aber gegeben durch $\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}$, folglich wird:

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} = \frac{a\beta + b\alpha}{\alpha\beta}.$$

Diese Gleichung lehrt also die *Summe zweier Quotienten als einen einzigen Quotienten darstellen.*

In durchaus analoger Weise erhalten wir:

$$\frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} = \frac{a\beta - b\alpha}{\alpha\beta}.$$

Ist $\frac{a}{\alpha} > \frac{b}{\beta}$, so ist die Differenz auf der linken Seite eine positive Zahl, also ist auch die rechte Seite positiv, für welche das Zeichen des Zählers mafsgebend ist, folglich mufs sein $a\beta > b\alpha$. Ist $\frac{a}{\alpha} < \frac{b}{\beta}$, so ist die linke Seite eine negative Zahl, also auch die rechte und zwar der Zähler derselben; folglich mufs sein $a\beta < b\alpha$. *Die Differenzen* $\frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta}$ *und* $a\beta - b\alpha$ *sind also gleichzeitig entweder positive oder negative Zahlen, d. h. stets gleichstimmig.*

Ist der Quotient $\frac{b}{\beta}$ ein Theiler des Quotienten $\frac{a}{\alpha}$, so ist $\frac{a}{\alpha} : \frac{b}{\beta}$ gleichfalls ein Quotient mit dem Zähler $\frac{a}{\alpha}$ und dem Nenner $\frac{b}{\beta}$. Die Zahl $\frac{a\beta}{b\alpha}$ hat die Eigenschaft, dafs $\frac{a\beta}{b\alpha}\,\frac{b}{\beta} = \frac{a}{\alpha}$ ist; weil $\frac{a\beta}{b\alpha}\,\frac{b}{\beta} = \frac{a\beta b}{b\alpha\beta} = \frac{ab\beta}{\alpha b\beta} = \frac{a}{\alpha}$, also ist

$$\frac{a}{\alpha} : \frac{b}{\beta} = \frac{a\beta}{b\alpha}.$$

Von dem gröfsten gemeinsamen Theiler zweier natürlicher Zahlen.

11. Es seien zwei natürliche Zahlen a und b gegeben, und es sei $a > b$. Nach der bereits eingeführten Bezeichnungsweise soll $[Rb]$ die Reihe der Zahlen bedeuten, welche aus der natür-

lichen Zahlenreihe R hervorgeht, wenn jedes Individuum derselben mit b multiplicirt wird.

Wenn a *nicht* der Reihe $[Rb]$ angehört, wenn also b *kein* Theiler von a ist, so kann a nur zwischen zwei benachbarten Zahlen der Reihe $[R\,b]$ liegen; ist $q\,b$ die kleinere Zahl, so ist $(q+1)\,b = q\,b + b$ die nächst gröfsere. Es ist also $q\,b+1$, $q\,b+2$, $q\,b+3$, ... $q\,b+(b-1)$ die Reihe der zwischen $q\,b$ von $(q+1)\,b$ eingeschlossenen Zahlen. Eine *bestimmte* derselben mufs $= a$ sein, und es gibt stets eine Zahl $r < b$, für welche $a = q\,b + r$ ist.

Es sind also den Zahlen a und b die Zahlen q und r durch die angestellte Betrachtung eindeutig zugeordnet. Läfst man nun an Stelle des Zahlenpaares a, b das Zahlenpaar b, r treten, so kann man, weil $b > r$ ist, mit dem letzteren Paar analog verfahren wie mit a, b.

Man erhält dadurch die Gleichung:

$$b = q_1\, r + r_1, \text{ wo } r_1 < r.$$

Mit dem Zahlenpaar r, r_1 kann man wiederum verfahren wie mit a, b und erhält dadurch:

$$r = q_2\, r_1 + r_2, \text{ wo } r_2 < r_1.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens entsteht folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{array}{llll}
a &= q\,b + r, & \text{wo} & r < b \\
b &= q_1 r + r_1, & " & r_1 < r \\
r &= q_2 r_1 + r_2, & " & r_2 < r \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3, & " & r_3 < r_2 \\
\ldots & \ldots & & \\
r_{n-3} &= q_{n-1}\, r_{n-2} + r_{n-1}, & " & r_{n-1} < r_{n-2} \\
r_{n-2} &= q_n\, r_{n-1} + r_n, & " & r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1}\, r_n + 0, & \text{d. h.} & r_{n+1} = 0.
\end{array}$$

Das System ist abgeschlossen, sobald in der Reihe der Zahlen r, r_1, r_2 ... r_n, r_{n+1} die letzte Zahl $= 0$ wird; und dies mufs *stets* nach einer *endlichen* Folge von Operationen eintreten, weil in der Reihe r, r_1, r_2 ... jedes folgende Glied kleiner ist als das vorangehende.

Wegen der Wichtigkeit des Verfahrens werde dasselbe durch zwei Beispiele erläutert:

1. $a = 378,\ b = 210.$

$$\begin{array}{lll} a = qb + r & \text{liefert} & 378 = 1.210 + 168\ (b = 210,\ r = 168) \\ b = q_1 r + r_1 & \text{"} & 210 = 1.168 + 42\ (r = 168,\ r_1 = 42) \\ r = q_2 r_1 + r_2 & \text{"} & 168 = 4.\ 42 + 0\ (r_1 = 42,\ r_2 = 0) \end{array}$$

es ist also $r_1 = 42$ das letzte von 0 verschiedene r; und das n des Schemas wird 1.

2. $a = 1015,\ b = 114.$

$$\begin{array}{lll} a = qb + r & \text{liefert} & 1015 = 8.114 + 103\ (b = 114,\ r = 103) \\ b = q_1 r + r_1 & \text{"} & 114 = 1.103 + 11\ (r = 103,\ r_1 = 11) \\ r = q_2 r_1 + r_2 & \text{"} & 103 = 9.\ 11 + 4\ (r_1 = 11,\ r_2 = 4) \\ r_1 = q_3 r_2 + r_3 & \text{"} & 11 = 2.\ 4 + 3\ (r_2 = 4,\ r_3 = 3) \\ r_2 = q_4 r_3 + r_4 & \text{"} & 4 = 1.\ 3 + 1\ (r_3 = 3,\ r_4 = 1) \\ r_3 = q_5 r_4 + r_5 & \text{"} & 3 = 3.\ 1 + 0\ (r_4 = 1,\ r_5 = 0) \end{array}$$

es ist also $r_4 = 1$ das letzte von 0 verschiedene r, und das n des Schemas wird 4. Denn in dem allgemeinen Schema wurde das letzte von 0 verschiedene r mit r_n bezeichnet; es ist also im Beispiel 1. $r_n = r_1 = 42$; im Beispiel 2. $r_n = r_4 = 1$.

Wir wollen das *letzte, von 0 verschiedene* r_n auch gleichzeitig mit μ bezeichnen. Durchläuft man das allgemeine Schema im umgekehrten Sinne, so lehrt die Gleichung:

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n = q_{n+1} \mu,$$

dafs $r_n = \mu$ ein Theiler von r_{n-1} ist; dann lehrt die darüber stehende Gleichung $r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$, dafs $r_n = \mu$ auch ein Theiler von r_{n-2} ist. Indem man in dieser Weise durch alle übrigen Gleichungen weiter schliefst, gelangt man endlich zu der Gleichung $a = qb + r$, in welcher $\mu = r_n$ ein gemeinsamer Theiler von r und b, folglich auch von a ist. *Der Procefs hat also einen gemeinsamen Theiler von a und b geliefert.*

Im Beispiel 1. ist $\mu = 42$, im Beispiel 2. ist $\mu = 1$.

Gibt man unserem Gleichungssystem die Gestalt:

$$\begin{aligned} r &= a - qb \\ r_1 &= b - q_1 r \\ r_2 &= r - q_2 r_1 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ r_n &= r_{n-2} - q_n r_{n-1}, \end{aligned}$$

so lehrt die erste Gleichung, dafs ein gemeinsamer Theiler ν von a und b auch ein solcher von r ist, die zweite Gleichung lehrt, dafs ν alsdann auch ein Theiler von r_1 ist; und indem durch alle übrigen Gleichungen weiter geschlossen wird, folgt, dafs ν *auch ein Theiler von* $r_n = \mu$ *ist.* Dies verlangt, dafs ν entweder $< \mu$ oder $= \mu$ ist. Folglich ist der durch das Gleichungssystem ermittelte Theiler μ der *gröfste gemeinsame Theiler der Zahlen a und b.*

Zahlenpaare, welche relativ prim heifsen.

12. Beispiel 1. der vorangehenden Nummer lieferte für $a = 378$, $b = 210$ als gröfsten gemeinsamen Theiler $\mu = 42$.

Dagegen lieferte Beispiel 2. für $a = 1015$, $b = 114$, $\mu = 1$, d. h. der gröfste gemeinsame Theiler war $= 1$.

Zwei Zahlen, deren gröfster gemeinsamer Theiler $= 1$ *ist, heifsen relativ prim,* abgekürzt sagt man: sie sind *r. p.*

Wenn μ *der gröfste Theiler von a und b ist,* und wenn $\frac{a}{\mu} = \alpha$, $\frac{b}{\mu} = \beta$ ist, also $a = \mu\alpha$, $b = \mu\beta$, *so sind* α *und* β *r. p.*; denn hätten α und β einen gemeinsamen Theiler ν und wäre $\alpha = \nu\alpha'$, $\beta = \nu\beta'$, folglich $a = \mu\nu\alpha'$, $b = \mu\nu\beta'$, so hätten a und b *aufser* dem *gröfsten* gemeinsamen Theiler μ einen noch *gröfseren* $\mu\nu$, was widersinnig ist.

Die Primzahlen der natürlichen Zahlenreihe.

13. Eine Zahl a, welche nur die Theiler a und 1 besitzt, heifst eine *Primzahl.* Für den Anfang der natürlichen Zahlenreihe sind 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59 u. s. w. Primzahlen.

Hat eine Zahl Theiler, so kann jeder derselben darauf geprüft werden, ob er selbst wieder Theiler hat oder nicht. Dieselbe Prüfung kann mit den neuen Theilern vorgenommen werden, welche kleiner sein müssen als die alten u. s. f., bis schliefslich keiner der vorhandenen Theiler mehr theilbar ist, d. h. eine Primzahl darstellt.

Es mufs sich also *jede Zahl,* welche Theiler besitzt, als ein *Product von Primfactoren* darstellen lassen. Treten dabei für zwei Zahlen *gewisse Factoren gemeinsam auf, so ist das Product der letzteren der gröfste gemeinsame Theiler.*

Beispielsweise hatten wir 42 als gröfsten gemeinsamen Theiler von 378 und 210 gefunden. Nun ist $378 = 2.3.3.3.7$ und $210 = 2.3.5.7$; es sind also 2, 3, 7 gemeinsame Primfactoren; ihr Product ist $= 42$.

Die gebrochenen Zahlen und die Division.

14. Für jede Zahl a, welche eine Zahl α zum Theiler hat, ist die Division $a:\alpha$ eine ausführbare Operation; wir erhalten die Zahl $q = \frac{a}{\alpha}$, und können schreiben:

$$a = \frac{a}{\alpha}\,\alpha = \overset{(1)}{\frac{a}{\alpha}} + \overset{(2)}{\frac{a}{\alpha}} + \cdots \overset{(\alpha)}{\frac{a}{\alpha}}.$$

Die Division $a:\alpha$ gestattet also, eine Zahl a als eine Summe gleicher Summanden darzustellen, deren Anzahl gleich dem Divisor α ist; man nennt deshalb den *Quotienten* $\frac{a}{\alpha}$ *den* α^{ten} *Theil der Zahl* a.

Der Wunsch, eine solche Darstellung zu erhalten, *wenn* α *kein Theiler von* a *ist*, hat zu der Erfindung der gebrochenen Zahlen geführt, welche folgendermafsen entstehen.

Man bildet die Zeichen $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\beta}{\alpha}$ und setzt in ihnen successive für α und β sämmtliche Paare von Zahlen, welche *relativ prim* sind. Für die so erhaltenen Zeichen erklärt man die in Nr. 10. für ganzzahlige Quotienten abgeleiteten Gleichungen als *Definitionsgleichungen*, wenn darin entweder *beide* Quotienten durch *zwei* der neuen Zeichen ersetzt werden, oder nur *ein* neues Zeichen an Stelle *eines* der beiden Quotienten tritt.

Dadurch ist dann die Beziehung von „Gröfser und Kleiner“ zwischen irgend zweien dieser Zeichen gegeben. Dieselben lassen sich also in eine eindeutige Folge bringen, sowohl untereinander wie in Bezug auf die ganzen Zahlen und erhalten dadurch den *Zahlencharakter*. Diese neuen Zahlen heifsen *gebrochene Zahlen*.

15. Ist $\frac{\alpha}{\beta}$ eine gebrochene Zahl, so heifst α der Zähler, β der Nenner, und es ist:

$$\alpha = \frac{\alpha}{\beta}\,\beta = \overset{(1)}{\frac{\alpha}{\beta}} + \overset{(2)}{\frac{\alpha}{\beta}} + \cdots \overset{(\beta)}{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

α wird also mittels $\frac{\alpha}{\beta}$ als Summe von β gleichen Summanden dargestellt; α und β bedeuten ein beliebiges Zahlenpaar, welches vorläufig als r. p. angenommen werden mufs.

Ist $\frac{\gamma}{\delta}$ eine zweite gebrochene Zahl, so ist:

$$\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} \text{ und } \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma},$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta + \gamma\beta}{\beta\delta} \text{ und } \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\beta\delta}.$$

Ferner gelten die Definitionsgleichungen:

$$\frac{-\alpha}{\beta} = -\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{-\alpha}{-\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Es folgt also aus

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\beta\delta},$$

dafs $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta}$ positiv, d. h. $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$ ist, wenn $\alpha\delta - \gamma\beta$ positiv ist, und $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta}$ negativ, d. h. $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$ ist, wenn $\alpha\delta - \gamma\beta$ negativ ist. Hierauf beruht die eindeutige Folge nach der Gröfse.

Ist eine der beiden Zahlen eine *ganze* Zahl, so gilt die Gleichung:

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\beta\delta},$$

ebenfalls als Definition. Ist z. B. $\beta = 1$ in $\frac{\alpha}{\beta}$, so wird:

$$\alpha - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta - \gamma}{\delta}$$

das Kriterium, ob die ganze Zahl $\alpha \gtrless$ ist als die gebrochene Zahl $\frac{\gamma}{\delta}$. Also ist auch die Stellung jeder *gebrochenen* Zahl in Bezug auf irgend eine *ganze* Zahl bestimmt.

16. Die gebrochenen Zahlen $\frac{\alpha}{\beta}$ heifsen *echte Brüche*, *wenn* $\alpha < \beta$, und *unechte Brüche, wenn* $\alpha > \beta$ *ist.*

Ist $\alpha < \beta$ (echter Bruch), so ist:

$$1 - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{\beta}, \text{ also positiv, weil } \beta > \alpha,$$

d. h. $\frac{\alpha}{\beta} < 1$; in Worten: die echten Brüche sind < 1.

Ist $\alpha > \beta$, so ist α darstellbar in der Form $\alpha = q\beta + \varrho$, wo $\varrho < \beta$ und q ganz ist. Also wird:

$$\frac{\alpha}{\beta} = q + \frac{\varrho}{\beta}$$

und $\frac{\alpha}{\beta} - q = \frac{\varrho}{\beta}$, d. h. positiv; folglich ist $\frac{\alpha}{\beta} > q$. Dagegen ist $\frac{\alpha}{\beta} - (q + 1) = \frac{\varrho}{\beta} - 1 = \frac{\varrho - \beta}{\beta}$, d. h. negativ, weil $\varrho < \beta$ ist.

Es ist also $q < \frac{\alpha}{\beta} < q + 1$, d. h. jeder unechte Bruch liegt zwischen zwei ganzen Zahlen und ist darstellbar als *Summe einer ganzen Zahl und eines echten Bruches.*

17. Mittels der gebrochenen Zahlen ist die Division $a:b$ eine stets ausführbare Operation, mag sowohl a wie b eine beliebige ganze Zahl sein:

1. Sind a und b r. p., $a < b$, so ist $a:b$ gleich dem echten Bruch $\frac{a}{b}$; denn es ist $\frac{a}{b}\,b = a$.

2. Sind a und b r. p., $a > b$, so ist:

$$a = qb + r$$
$$a:b = q + \frac{r}{b},$$

wo b ganz, $\frac{r}{b}$ ein echter Bruch; denn $\left(q + \frac{r}{b}\right) b$ liefert $qb + r = a$.

3. Sind a und b *nicht* r. p., $a < b$ und $a = \mu\alpha$, $b = \mu\beta$, α und β r. p., so ist $a:b = \frac{\alpha}{\beta}$, wo $\frac{\alpha}{\beta}$ ein echter Bruch ist; denn $\frac{\alpha}{\beta}\,b$ liefert $\frac{\alpha}{\beta}\,\mu\beta = \mu\alpha = a$.

4. Sind a und b *nicht* r. p., $a > b$, so ist $a = qb + r$; ist $a = \mu\alpha$, $b = \mu\beta$, $r = \mu\varrho$, α und β r. p., so ist $\alpha > \beta$ und $\alpha = q\beta + \varrho$; folglich

$a:b = q + \frac{\varrho}{\beta}$; denn $\left(q + \frac{\varrho}{\beta}\right) b$ liefert:

$$qb + \frac{\varrho}{\beta}b = qb + \varrho\mu = qb + r = a.$$

Die Operation der Division $a:b$ verlangt also für a, b r. p., $a < b$: das Bilden des echten Bruches $\frac{a}{b}$; für a, b r. p., $a > b$: die Bildung von $a = qb + r$. Aus dieser Darstellung wird q, r, entnommen, der echte Bruch $\frac{r}{b}$ gebildet und schliefslich der Ausdruck $q + \frac{r}{b}$. Dagegen verlangt $a:b$ für a, b *nicht* r. p., $a < b$: das Aufsuchen des gröfsten Theilers μ, Bildung von $\frac{a}{\mu} = \alpha$, $\frac{b}{\mu} = \beta$, Bildung des echten Bruches $\frac{\alpha}{\beta}$; für a, b *nicht* r. p., $a > b$: das Aufsuchen des gröfsten Theilers μ, Bildung von $\frac{a}{\mu} = \alpha$, $\frac{b}{\mu} = \beta$, Darstellung von $\alpha = q\beta + \varrho$; hieraus wird q, ϱ, entnommen, der echte Bruch $\frac{\varrho}{\beta}$ gebildet und schliefslich der Ausdruck $q + \frac{\varrho}{\beta}$.

Die Zerlegung einer Zahl a in b gleiche Summanden nimmt demgemäfs folgende Formen an:

a, b r. p., $a < b$ $\qquad a = \overset{(1)}{\frac{a}{b}} + \cdots \overset{(b)}{\frac{a}{b}},$

a, b r. p., $a > b$ $\qquad a = \overset{(1)}{\left(q + \frac{r}{b}\right)} + \cdots \overset{(b)}{\left(q + \frac{r}{b}\right)}$
$[a = qb + r]$,

a, b nicht r. p., $a < b$ $\quad a = \overset{(1)}{\frac{\alpha}{\beta}} + \cdots \overset{(b)}{\frac{\alpha}{\beta}}\ [a = \mu\alpha,\ b = \mu\beta]$,

a, b nicht r. p., $a > b$ $\quad a = \overset{(1)}{\left(q + \frac{\varrho}{\beta}\right)} + \cdots \overset{(b)}{\left(q + \frac{\varrho}{\beta}\right)}$
$[a = qb + r,\ b = \mu\beta,\ r = \mu\varrho]$.

18. An Stelle des Operationszeichens $a:b$ setzt man auch $\frac{a}{b}$. Dieses Zeichen ist nur dann eine *gebrochene Zahl*, wenn a und b r. p. sind. Ist b ein Theiler von a, so ist $\frac{a}{b}$ ein *Ausdruck*, welcher

zu einer ganzen Zahl führt. Ist b weder Theiler von a, noch r. p. zu a, so besitzen a und b einen gröfsten Theiler, und $\frac{a}{b}$ ist ein Ausdruck, welcher als *reductibler Bruch* bezeichnet wird; er führt zu der gebrochenen Zahl $\frac{\alpha}{\beta}$, wenn μ der gröfste Theiler von a und b und $a = \mu\alpha$, $b = \mu\beta$ ist.

Im Gegensatz zu den reductiblen Brüchen, welche stets zu gebrochenen Zahlen führen, nennt man letztere *irreductible Brüche*.

Sind zwei gebrochene Zahlen $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\gamma}{\delta}$ einander gleich, so ist Zähler = Zähler, Nenner = Nenner; denn aus

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ folgt } \alpha\delta = \beta\gamma.$$

Die Zahl $\alpha\delta$ hat also die Theiler β und γ; da α und β r. p. sind, so mufs δ den Theiler β besitzen, d. h. $\delta = m\beta$ sein, wo m eine bestimmte ganze Zahl ist; und da δ und γ r. p. sind, so mufs α den Theiler γ besitzen, d. h. $\alpha = n\gamma$ sein, wo n eine bestimmte ganze Zahl ist. Es mufs also sein:

$$\alpha\delta = mn\beta\gamma = \beta\gamma, \text{ d. h. } mn = 1,\ m = 1,\ n = 1,$$

folglich $\alpha = \gamma$, $\delta = \beta$ oder $\beta = \delta$.

Die rationale Zahlenreihe und das zugeordnete geradlinige Punktgebilde.

19. *Die Gesammtheit der ganzen und gebrochenen Zahlen läfst sich nach Nr. 14 und 15 in eine eindeutige Folge bringen, wenn man festsetzt, dafs die Differenz eines Individuums A gegen das nächstvorhergehende B, d. h. $A - B$, stets positiv sein soll.* Da in diesem Falle $A > B$ genannt wird, so können wir sagen: *die Gesammtheit der positiven und negativen ganzen und gebrochenen Zahlen erhält eine eindeutig bestimmte Folge, wenn man sie nach der Gröfse ordnet.*

Diese Folge heifst die rationale Zahlenreihe; denn die ganzen und gebrochenen Zahlen werden unter dem gemeinsamen Namen *rationale Zahlen* zusammengefafst.

Wir hatten im Anfang (Nr. 2., 5.) auf einer Geraden von einem

Punkte O aus, welcher das Zeichen 0 erhielt, Punkte gleicher Entfernung nach beiden Seiten hin festgelegt und jedem eine positive oder negative *ganze* Zahl zugeordnet.

Entsprach einem Punkte A eine Zahl a, einem Punkte B eine Zahl b, so war $b > a$, wenn B in positiver Richtung von A lag und umgekehrt; die positive Differenz der zu zwei benachbarten Punkten gehörigen Zahlen war stets $= 1$.

In ähnlicher Weise läfst sich nun auch jeder *gebrochenen* Zahl ein Punkt dieser Geraden so zuordnen, dafs der Punkt der Zahl $\frac{\gamma}{\delta}$ im positiven Abstande des Punktes $\frac{\alpha}{\beta}$ liegt, wenn

$$\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} +, \text{ d. h. } \frac{\gamma}{\delta} > \frac{\alpha}{\beta}$$

ist.

Das Verfahren ist folgendes: wir bezeichnen die Wegstrecke, welche zwischen zwei benachbarten Punkten ganzer Zahlen liegt, als *Streckeneinheit.* Es ist klar, dafs sich letztere in beliebig viele congruente Theilstrecken zerfällen läfst. Ist deren *Anzahl* gleich einer beliebigen ganzen Zahl α, so wollen wir jede *Theilstrecke als Theilstrecke* $\left[\frac{1}{\alpha}\right]$ bezeichnen.

Es sei gegeben der *echte Bruch* $\frac{\alpha}{\beta}$, also $\beta > \alpha$.

Zerfällen wir die Streckeneinheit in β Theilstrecken $\left[\frac{1}{\beta}\right]$ und durchlaufen wir von Null aus in positiver Richtung α Theilstrecken $\left[\frac{1}{\beta}\right]$, so soll der Endpunkt dieses Weges der Zahl $\frac{\alpha}{\beta}$ zugeordnet sein. Der Punkt liegt zwischen Punkt 0 und Punkt 1; denn 1 wird von 0 aus durch β Theilstrecken $\left[\frac{1}{\beta}\right]$ erreicht, und β ist $> \alpha$.

$\frac{\gamma}{\delta}$ sei ein anderer echter Bruch. Sein Punkt wird durch γ Theilstrecken $\left[\frac{1}{\delta}\right]$ erreicht, also auch durch $\beta\gamma$ Theilstrecken $\left[\frac{1}{\beta\delta}\right]$; ebenso wird $\frac{\alpha}{\beta}$ durch $\alpha\delta$ Theilstrecken $\left[\frac{1}{\beta\delta}\right]$ erreicht.

Punkt $\frac{\gamma}{\delta}$ liegt also in positiver Richtung von Punkt $\frac{\alpha}{\beta}$, wenn $\beta\gamma > \alpha\delta$, d. h. wenn $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\alpha}{\beta}$.

Ist $\frac{\alpha}{\beta}$ ein *unechter Bruch*, d. h. $\alpha > \beta$, so ist $\frac{\alpha}{\beta} = q + \frac{\varrho}{\beta}$, ($q$ ganze Zahl, $\frac{\varrho}{\beta}$ echter Bruch).

Alsdann soll Punkt $\frac{\alpha}{\beta}$ erreicht werden, wenn man vom Punkte q aus ϱ Theilstrecken $\left[\frac{1}{\beta}\right]$ in positiver Richtung zurücklegt.

Auf diese Weise entspricht jedem Punkte $\frac{\varrho}{\beta}$ eines echten Bruches ein Punkt $\frac{\alpha}{\beta} = q + \frac{\varrho}{\beta}$ eines unechten Bruches; und zwar gelangt man durch q Streckeneinheiten von Punkt $\frac{\varrho}{\beta}$ zu Punkt $\frac{\alpha}{\beta}$.

Je mehr ganze Zahlen wir zur Bildung von echten Brüchen verwenden, um so mehr echte Brüche werden wir erhalten, um so mehr Punkte zwischen 0 und 1, und entsprechend viele zwischen 1 und 2, 2 und 3 u. s. w. Aber wir können den Proceſs noch so weit treiben und dadurch die Punktreihe der gebrochenen Zahlen mehr und mehr verdichten, so werden wir es stets nur mit einer *Punktreihe* zu thun haben, d. h. mit etwas *Discretem* im Gegensatz zum *Continuirlichen* (s. Nr. 33.). Zwischen zwei getrennten Punkten liegen aber stets andere Punkte, und unter diesen müssen sich unzählige finden, welche niemals einer gebrochenen Zahl zugeordnet werden können.

Es müſste daher eine *neue Gattung von Zahlen*, also *etwas von den rationalen Zahlen Verschiedenes* erfunden werden, wenn die unbezeichnet gebliebenen Punkte eine Zuordnung zu Zahlen ermöglichen sollten. Wir werden in der That bald eine solche Erfindung unter dem Namen der *irrationalen Zahlen* kennen lernen.

Von den Potenzen.

20. Wir hatten eine Summe von α gleichen ganzzahligen Summanden a als das Product $a\alpha$ bezeichnet und waren von diesem Ausgangspunkte zu den Begriffen der Division, der Quotienten und der gebrochenen Zahlen gelangt.

Analog wollen wir ein Product von α gleichen rationalen

Factoren a als *Potenz* a^α bezeichnen und werden dadurch zu den Begriffen der *Radicirung*, der *rationalen Wurzeln* und der *irrationalen Zahlen* gelangen.

a heifst die Basis, die positive ganze Zahl α wird der Exponent der Potenz a^α genannt; im Hinblick auf α heifst sie auch eine *ganze Potenz.*

Die Bedeutung des Zeichens a^α führt zu folgenden Fundamentalgleichungen.

Die Potenz $(a\,b)^\gamma$ besitzt γ Factoren $(a\,b)$, also γ Factoren a, welche die Potenz a^γ liefern, und γ Factoren b, welche die Potenz b^γ liefern. Folglich ist:

$$(a\,b)^\gamma = a^\gamma\,b^\gamma.$$

Die Potenz $\left(\frac{a}{b}\right)^\gamma$ führt zu einer Quotientenform, deren Zähler die Zahl a, deren Nenner die Zahl b γ-mal als Factor enthält. Der Zähler ist also $= a^\gamma$, der Nenner $= b^\gamma$. Folglich wird:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\gamma = \frac{a^\gamma}{b^\gamma}.$$

Die Potenz $(a^\alpha)^\beta$ besteht aus β Factoren a^α; α^α besteht aus α Factoren a, es sind also $(\alpha\,\beta)$ Factoren a vorhanden, d. h. es ist:

$$(a^\alpha)^\beta = a^{(\alpha\,\beta)} = a^{(\beta\,\alpha)} = (a^\beta)^\alpha.$$

Das Product der Potenzen a^α und a^β mufs selbst wieder eine Potenz von a sein; denn $a^\alpha\,a^\beta$ enthält α Factoren a und β Factoren a, also $(\alpha + \beta)$ Factoren a; daher ist:

$$a^\alpha\,a^\beta = a^{(\alpha+\beta)}.$$

Setzt man hierin $\alpha + \beta = \gamma$ und $\alpha = \gamma - \beta$, so folgt:

$$a^{(\gamma-\beta)}\,a^\beta = a^\gamma,$$

d. h.

$$a^{(\gamma-\beta)} = \frac{a^\gamma}{a^\beta},$$

wo $\beta < \gamma$ ist.

Diese Gleichung dient als *Definitionsgleichung* für die Fälle $\beta = \gamma$ und $\beta > \gamma$; denn in beiden Fällen behält die rechte Seite ihren Sinn, und es wird für $\beta = \gamma$, d. h. für $\gamma - \beta = 0$:

$$a^0 = \frac{a^\gamma}{\alpha^\gamma} = 1;$$

für $\beta > \gamma$, d. h. für $\beta - \gamma = \alpha$, $\gamma - \beta = -\alpha$ und $\beta = \gamma + \alpha$:

$$a^{\gamma - \beta} = a^{-\alpha} = \frac{a^\gamma}{a^{\gamma + \alpha}} = \frac{a^\gamma}{a^\gamma a^\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}.$$

Also

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}.$$

Das ist die *Definitionsgleichung für Potenzen mit negativen ganzen Exponenten.*

Von den rationalen Wurzeln und den gebrochenen Potenzen.

21. Ist α ein Theiler von a, also a ein Vielfaches von α, so läſst sich a als eine Summe von α gleichen Summanden darstellen, welche mit $\frac{a}{\alpha}$ bezeichnet und Quotienten genannt wurden.

Ist a eine Potenz vom Grade α, so läſst sich a als ein Product von α gleichen Factoren darstellen, welche mit $\sqrt[\alpha]{a}$ bezeichnet und α^{te} Wurzeln von a genannt werden sollen.

a heiſst der *Radicand*, die positive ganze Zahl α heiſst der *Wurzelexponent*, $\sqrt[\alpha]{a}$ heiſst die α^{te} *Wurzel aus a.* Die Auffindung der durch $\sqrt[\alpha]{a}$ vorgestellten Zahl mittels a und α heiſst *Radicirung* oder *Wurzelausziehung.*

Der Quotient $\frac{a}{\alpha}$ wurde gefunden mittels des Divisionsprocesses; man multiplicirte die Individuen der ganzen Zahlenreihe mit α; unter diesen suchte man die darin auftretende Zahl a auf und erhielt mittels a diejenige Zahl $\frac{a}{\alpha}$ der natürlichen Zahlenreihe, aus welcher a hervorgegangen war. Analog wird die rationale Wurzel $\sqrt[\alpha]{a}$ gefunden dadurch, daſs man die Individuen der rationalen Zahlenreihe zur Potenz α erhebt, die darin auftretende Zahl a aufsucht und mittels letzterer die ihr zugeordnete Zahl $\sqrt[\alpha]{a}$ der rationalen Zahlenreihe findet.

22. Aus der Bedeutung, welche wir dem Zeichen $\sqrt[\alpha]{a}$ beigelegt haben, ergeben sich folgende Beziehungen zwischen rationalen Wurzeln.

Die Definitionsgleichung für $\sqrt[\alpha]{a}$ ist

$$\left(\sqrt[\alpha]{a}\right)^\alpha = a.$$

Da die Zahl a^α (a rational, α ganz und positiv) aus α Factoren a besteht, so ist:

$$\sqrt[\alpha]{a^\alpha} = a = \left(\sqrt[\alpha]{a}\right)^\alpha.$$

Aus diesem Grunde heifst die Radicirung die umgekehrte Operation der Potenzirung.

Aus $x^\alpha = y^\alpha$ folgt $x = y$. Sind also $\sqrt[\alpha]{a}$ und $\sqrt[\alpha]{b}$ zwei rationale Wurzeln und ist $\left(\sqrt[\alpha]{a}\right)^\alpha = \left(\sqrt[\alpha]{b}\right)^\alpha$, d. h. $a = b$, so folgt $\sqrt[\alpha]{a} = \sqrt[\alpha]{b}$.

Umgekehrt wird $a = b$, wenn $\sqrt[\alpha]{a} = \sqrt[\alpha]{b}$ ist, denn aus $x = y$ folgt $x^\alpha = y^\alpha$.

Für jede rationale Zahl a und jede positive ganze Zahl α ist $\sqrt[\alpha]{a^\alpha} = a$; also ist auch $\sqrt[\alpha\beta]{a^{\alpha\beta}} = a$, d. h.:

$$\sqrt[\alpha]{a^\alpha} = \sqrt[\alpha\beta]{a^{\alpha\beta}}.$$

Es ist $\left(\sqrt[\alpha]{a^\beta}\right)^\alpha = a^\beta = \left[\left(\sqrt[\alpha]{a}\right)^\alpha\right]^\beta = \left(\sqrt[\alpha]{a}\right)^{\alpha\beta} = \left[\left(\sqrt[\alpha]{a}\right)^\beta\right]^\alpha$; also ist $\sqrt[\alpha]{a^\beta} = \left(\sqrt[\alpha]{a}\right)^\beta$.

Sind $\sqrt[\beta]{p} = u$ und $\sqrt[\alpha]{u} = q$ rationale Wurzeln, so ist $q^\alpha = u$, $u^\beta = p$, also $p = q^{\alpha\beta}$, d. h. $q = \sqrt[\alpha\beta]{p}$; setzt man in $\sqrt[\alpha]{u}$ für u den Ausdruck $\sqrt[\beta]{p}$, so wird:

$$q = \sqrt[\alpha]{\sqrt[\beta]{p}} = \sqrt[\alpha\beta]{p}.$$

Es ist $\left(\sqrt[\alpha]{a}\ \sqrt[\alpha]{b}\right)^\alpha = \left(\sqrt[\alpha]{a}\right)^\alpha \left(\sqrt[\alpha]{b}\right)^\alpha = a\ b = \left(\sqrt[\alpha]{ab}\right)^\alpha$, also ist $\sqrt[\alpha]{a\ b} = \sqrt[\alpha]{a}\ \sqrt[\alpha]{b}$.

Es ist $\left(\frac{\sqrt[\alpha]{a}}{\sqrt[\alpha]{b}}\right)^\alpha = \frac{\left(\sqrt[\alpha]{a}\right)^\alpha}{\left(\sqrt[\alpha]{b}\right)^\alpha} = \frac{a}{b} = \left(\sqrt[\alpha]{\frac{a}{b}}\right)^\alpha$, also

$$\sqrt[\alpha]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[\alpha]{a}}{\sqrt[\alpha]{b}}.$$

23. Es sei α ein Theiler von $m = \mu\alpha$, so ist $\mu = \frac{m}{\alpha}$. Bildet man das Product der m Factoren $\sqrt[\alpha]{a}$, so besteht dasselbe aus μ Gruppen von je α Factoren $\sqrt[\alpha]{a}$; jede Gruppe ist also gleich a und

$$\left(\sqrt[\alpha]{a}\right)^m = a^\mu = a^{\frac{m}{\alpha}}.$$

Schreibt man

$$a^{\frac{n}{\alpha}} = \left(\sqrt[\alpha]{a}\right)^n$$

und ist α r. p. zu n, so verliert die linke Seite jeden Sinn, während die rechte Seite ihn behält. Deshalb benutzen wir diese Gleichung für die *Definition der sogenannten gebrochenen Potenzen*, d. h. der Potenzen, deren Exponent eine gebrochene Zahl ist, und setzen:

$$a^{\frac{\beta}{\alpha}} = \sqrt[\alpha]{a^\beta},$$

wenn weder β ein Vielfaches von α, noch α ein Vielfaches von β ist.

In Verbindung mit der Gleichung:

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$$

leiten wir aus $a^{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[\beta]{a^\alpha}$ die *Definitionsgleichung für Potenzen mit negativen gebrochenen Exponenten* ab, und setzen fest, dafs

$$a^{-\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{1}{\sqrt[\beta]{a^\alpha}}$$

sein soll.

Von den irrationalen Wurzeln.

24. Es sind nunmehr alle Potenzen definirt, deren Basis jede positive rationale Zahl, deren Exponent jede positive und negative rationale Zahl sein darf.

Es ist $\left(\sqrt[\alpha]{a}\right)^{\alpha\beta} = a^\beta$; $\left(\sqrt[\beta]{b}\right)^{\alpha\beta} = b^\alpha$; also ist $\sqrt[\alpha]{a} > \sqrt[\beta]{b}$, wenn $a^\beta > b^\alpha$ und umgekehrt.

Auf diese Erkenntnifs werden wir uns stützen, wenn statt der rationalen Wurzeln die jetzt aufzustellenden irrationalen Wurzeln betrachtet und der Gröfse nach unterschieden werden sollen.

Bezeichnet $[R]$ die Reihe der positiven rationalen Zahlen, so soll $[R]^\alpha$ die Reihe bezeichnen, welche aus $[R]$ entsteht, wenn jedes Individuum von $[R]$ zur Potenz α erhoben wird; analoge Bedeutung sollen $[R]^\beta$, $[R]^\gamma$ ... haben.

Wenn in den Zeichen $\sqrt[\alpha]{a}$, $\sqrt[\beta]{b}$, $\sqrt[\gamma]{c}$, die Zahlen (Radicanden) a, b, c *nicht* in den Reihen $[R]^\alpha$ bezw. $[R]^\beta$, $[R]^\gamma$ auftreten, so *haben* $\sqrt[\alpha]{a}$, $\sqrt[\beta]{b}$, $\sqrt[\gamma]{c}$ *keinen Sinn mehr*, sie hören auf, rationale Wurzeln zu sein.

Nun hatte uns der Wunsch, jede beliebige ganze Zahl a mittels einer anderen beliebigen ganzen Zahl α als eine Summe von α gleichen Summanden darzustellen, auf Grund des Quotientenbegriffs zu der Erfindung der gebrochenen Zahlen geführt. Der Wunsch, jede beliebige rationale Zahl A mittels einer beliebigen ganzen Zahl α als ein Product von α Factoren darzustellen, soll uns nun gleichfalls zu der Erfindung einer neuen Art von Zahlen führen.

Wir geben ihnen das Zeichen $\sqrt[\mu]{A}$ und nehmen an, dafs, wenn ν der gröfste Exponent ist, für welchen $A = B^\nu$ wird, dafs alsdann μ und ν r. p. sind.

Die neuen Zahlen nennen wir *irrationale Wurzeln*; sie gehören zur Klasse der *irrationalen Zahlen*, deren Wesen erörtert werden wird.

Als *Definitionsgleichungen* für bestimmte Rechnungsoperationen zwischen zwei irrationalen Wurzeln gelten die Gleichungen, welche für rationale Wurzeln bewiesen sind. Also:

$$\left(\sqrt[\mu]{A}\right)^\mu = A; \quad \sqrt[\mu]{A^\mu} = A;$$

$$\left(\sqrt[\mu]{A}\right)^\nu = \sqrt[\mu]{A^\nu}; \quad \sqrt[\mu]{A^\nu} = A^{\frac{\nu}{\mu}}; \quad \sqrt[\varkappa\mu]{A^{\varkappa\nu}} = \sqrt[\mu]{A^\nu};$$

$$\frac{1}{\sqrt[\mu]{A^\nu}} = \frac{1}{A^{\frac{\nu}{\mu}}} = A^{-\frac{\nu}{\mu}};$$

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{A}} = \sqrt[\mu\nu]{A} = A^{\frac{1}{\mu\nu}}.$$

Die irrationalen Wurzeln lassen sich nun in die Folge der rationalen Zahlen nach demselben Princip von Gröfser und Kleiner einordnen, wie die Folge der gebrochenen Zahlen in die Folge der natürlichen Zahlen eingeordnet wurde.

Für die rationalen Wurzeln hatten wir erkannt, dafs $\sqrt[\alpha]{a} > \sqrt[\beta]{b}$, wenn $a^\beta > b^\alpha$ ist.

Für zwei irrationale Wurzeln $\sqrt[\alpha]{A}$, $\sqrt[\beta]{B}$ setzen wir $\sqrt[\alpha]{A} > \sqrt[\beta]{B}$, wenn $A^\beta > B^\alpha$ ist. Für eine rationale Wurzel $\sqrt[\alpha]{a}$ und eine irrationale Wurzel $\sqrt[\beta]{B}$ setzen wir

$$\sqrt[\alpha]{a} > \sqrt[\beta]{B}, \text{ wenn } a^\beta > B^\alpha;$$

ist $\alpha = 1$, so wird $\sqrt[\alpha]{a} = a$ und

$$a > \sqrt[\beta]{B}, \text{ wenn } a^\beta > B.$$

Wird auch hier festgesetzt, dafs jede gröfsere Zahl auf der positiven Seite einer kleineren liegen soll, so ist die Folge festgesetzt, und *jede irrationale Wurzel erhält ihre bestimmte Stelle innerhalb der rationalen Zahlenreihe.*

25. Das *Wesen der irrationalen Zahlen* und ihr Gegensatz zu den rationalen Zahlen läfst sich an den irrationalen Wurzeln erläutern.

$\sqrt[\mu]{A}$ heifst ein irrationaler reductibler Wurzelausdruck, wenn A darstellbar ist als Potenz B^ν (s. S. 27) und wenn μ und ν den gröfsten Theiler $\varkappa$ besitzen; aus den Definitionsgleichungen folgt dann

$$\sqrt[\mu]{A} = \sqrt[\mu]{B^\nu} = \sqrt[\varkappa\mu']{B^{\varkappa\nu'}} = \sqrt[\mu']{B^{\nu'}}.$$

Da μ', ν' r. p. sind, so ist der irrationale Wurzelausdruck $\sqrt[\mu]{A}$ durch die irreductible irrationale Wurzel $\sqrt[\mu']{B^{\nu'}}$ ausgedrückt.

Wir nehmen im Folgenden an, dafs das Zeichen $\sqrt[\mu]{A}$ eine irreductible irrationale Wurzel darstellt.

Betrachtet man die positive rationale Zahlenreihe $[R]$ und leitet durch Potenzirung ihrer Individuen mittels des Exponenten μ die Reihe $[R]^\mu$ ab, so kann A kein Individuum derselben sein. Da

die Reihe der rationalen Zahlen nie vollständig hingeschrieben werden kann — denn dazu bedarf es *sämmtlicher* ganzen Zahlen, deren wir nie habhaft werden können —, so wird A zwischen zwei benachbarte Individuen $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu$ und $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^\mu$ fallen, deren Differenz angebbar ist.

Es ist also

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu < A < \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^\mu$$

und

$$\frac{\alpha}{\beta} < \sqrt[\mu]{A} < \frac{\gamma}{\delta}.$$

Zwischen $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\gamma}{\delta}$ lassen sich beliebig viele Individuen der Reihe $[R]$ einschalten; dann wird A zwischen der μ^{ten} Potenz zweier derselben, $\frac{\alpha'}{\beta'}$ und $\frac{\gamma'}{\delta'}$, liegen und es wird $\frac{\gamma'}{\delta'} - \frac{\alpha'}{\beta'} < \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta}$ sein; so können wir fortfahren und A zwischen zwei Individuen $\left(\frac{\alpha^{(n)}}{\beta^{(n)}}\right)^\mu$ und $\left(\frac{\gamma^{(n)}}{\delta^{(n)}}\right)^\mu$ einschliefsen, deren Differenz beliebig klein wird.

Wir erhalten also eine Reihe unter einander geschriebener Zahlenpaare:

$$\begin{array}{l} \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha'}{\beta'}, \frac{\alpha''}{\beta''} \cdots \frac{\alpha^{(n-1)}}{\beta^{(n-1)}}, \frac{\alpha^{(n)}}{\beta^{(n)}}, \\ \frac{\gamma}{\delta}, \frac{\gamma'}{\delta'}, \frac{\gamma''}{\delta''} \cdots \frac{\gamma^{(n-1)}}{\delta^{(n-1)}}, \frac{\gamma^{(n)}}{\delta^{(n)}}, \end{array}$$

deren Differenz kleiner und kleiner wird und über jedes Mafs hinaus verkleinert werden kann. In Folge dessen wird auch die Differenz der Zahlen $\left(\frac{\alpha^{(n)}}{\beta^{(n)}}\right)^\mu$ und $\left(\frac{\gamma^{(n)}}{\delta^{(n)}}\right)^\mu$, zwischen denen A liegt, über alles Mafs hinaus verkleinert werden. Es wird also die irrationale Wurzel $\sqrt[\mu]{A}$ zwischen zwei rationalen Zahlen eingeschlossen werden, deren Differenz so klein ist, dafs wir in praxi jede derselben an Stelle von $\sqrt[\mu]{A}$ setzen dürfen.

Jede irrationale Wurzel $\sqrt[\alpha]{A}$ stellt eine Forderung auf, welche nur näherungsweise erfüllbar ist; ihre Auswerthung gleicht der Tilgung einer Milliardenschuld, bei welcher der letzte Pfennig nicht bezahlt werden kann.

Das Zeichen $\sqrt[\alpha]{A}$ ermöglicht es, zwei Reihen von Brüchen zu erzeugen; betrachten wir beliebig eine derselben, so erfüllt keines ihrer Glieder die Forderung, dafs seine α^{te} Potenz die Zahl A ist; aber jedes zuletzt erzeugte Glied zeichnet sich vor allen älteren Mitgliedern derselben Reihe dadurch aus, dafs seine α^{te} Potenz der Zahl A näher liegt, als die α^{te} Potenz jedes der Vorgänger; und zwar kann der Abstand, durch Fortentwickelung der Reihe mittels $\sqrt[\alpha]{A}$, so klein gemacht werden, dafs der Unterschied für uns mit der Null zusammenfliefst.

Damit ist das Wesen der irrationalen Zahlen überhaupt charakterisirt: mittels eines einfachen Ausdrucks wird eine Forderung aufgestellt, welche durch keine rationale Zahl erfüllt werden kann; dagegen gestattet der Ausdruck die Erzeugung zweier Reihen von Brüchen, deren Individuen schliefslich der Forderung so nahe kommen, dafs dieselbe als erfüllt angesehen werden darf [1]).

Von den Logarithmen.

26. Die Gleichung zwischen einer Potenz p, einer Basis a und einem Exponenten λ läfst sich schreiben:

$$p = a^{\lambda}, \text{ oder } a = \sqrt[\lambda]{p}.$$

In dem einen Falle denkt man sich a, λ gegeben, in dem anderen λ, p.

Ist statt dessen p, a gegeben und sind a, p positive Zahlen, so *soll λ der a-Logarithmus von p* heifsen und mit $\overset{a}{log}\, p$ bezeichnet werden. Es ist also:

$$p = a^{\overset{a}{log}\, p}.$$

Man nennt p den Numerus von $\overset{a}{log}\, p$. Der Logarithmus einer Zahl ist also, wenn diese als Potenz von a betrachtet wird, der Exponent der Basis a. Ist $a = 10$, so heifst der Logarithmus einer beliebigen Zahl n ihr *dekadischer* Logarithmus, und man schreibt einfach:

$$10^{log\, n} = n.$$

Die Gesammtheit der dekadischen Logarithmen heifst das *dekadische oder Briggs'sche Logarithmensystem.*

[1]) Siehe Rudolf Lipschitz, Grundlagen der Analysis, Abschnitt I, Capitel III.

Für das Rechnen mit Logarithmen ist das Rechnen mit Potenzen mafsgebend; die Exponenten dürfen ganz, gebrochen, auch irrational, positiv oder negativ sein.

Sind a, b positive rationale Zahlen, so ist nach der Definition:

$$a = 10^{\log a}, \quad b = 10^{\log b}.$$

Für $a = 1$ wird erhalten $1 = 10^{\log 1}$; da $1 = 10^0$, so mufs sein: $\log 1 = 0$, weil aus $10^x = 10^y$ folgt $x = y$.

Es ist deshalb auch $\log a = \log b$, wenn $10^{\log a} = 10^{\log b}$, d. h. wenn $a = b$ ist.

Aus $c = ab$ folgt $10^{\log c} = 10^{\log a} \,.\, 10^{\log b} = 10^{\log a + \log b}$, also $\log c = \log (ab) = \log a + \log b$.

Aus $d = \frac{a}{b}$ folgt $10^{\log d} = \frac{10^{\log a}}{10^{\log b}} = 10^{(\log a - \log b)}$, also $\log d = \log \left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$.

Da $a \gtrless b$ zur Folge hat $\log a \gtrless \log b$, so besitzen alle positiven Zahlen > 1 *positive* Logarithmen, und alle positiven Zahlen < 1, d. h. alle echten Brüche, *negative* Logarithmen. Logarithmen von negativen Zahlen kann es nicht geben.

Es ist $a^\beta = (10^{\log a})^\beta = 10^{\beta \log a}$, also

$$\log (a^\beta) = \beta \log a.$$

Analog folgt:

$$\log (a^{-\beta}) = -\beta \log a,$$

$$\log \sqrt[\beta]{a} = \frac{1}{\beta} \log a.$$

Wir haben also erhalten:

$$\log (ab) = \log a + \log b,$$

$$\log \left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b,$$

$$\log (a^\beta) = \beta \log a,$$

$$\log (\sqrt[\beta]{a}) = \frac{1}{\beta} \log a,$$

wo a, b positiv vorausgesetzt sind, β dagegen sowohl positiv wie negativ sein darf. Dafs diese Gleichungen auch dann gelten, wenn die darin auftretenden Zahlen irrational sind, oder ihre Logarithmen es sind, läfst sich mittels der rationalen Grenzwerthe

zeigen, zwischen denen jede irrationale Zahl eingeschlossen werden kann.

Die dekadischen Logarithmen spielen eine grofse Rolle überall da, wo in unseren Gleichungen an Stelle der zahlenbezeichnenden Buchstaben bestimmte Zahlen treten, und statt der Buchstabenrechnung die numerische Berechnung verlangt wird, wie dies bei der astronomischen Ortsbestimmung der Fall ist. Hierbei läfst sich die Multiplication zweier Zahlen a und b dadurch bewerkstelligen, dafs man ihre Logarithmen addirt, wodurch der Logarithmus von ab entsteht; zu diesem bestimmt man den Numerus ab.

Das Verfahren wird durch die dekadischen Logarithmentafeln ermöglicht, in denen die Logarithmen einer Reihe von Numeri gegeben sind. Mittels derselben tritt dann ferner an Stelle einer Division eine Subtraction, an Stelle einer Potenzirung mit ganzen Exponenten eine Multiplication, an Stelle einer Radicirung mit einem ganzzahligen Wurzelexponenten eine Division.

27. Für die reine Mathematik ist das sogenannte System der *natürlichen Logarithmen* von hoher Bedeutung.

Für dieses wird die Basis mit e bezeichnet. Die Zahl e ist irrational, man kann bei numerischer Verwerthung also nur Näherungswerthe anwenden; ein solcher ist $e = 2.71828\ldots$ In Wirklichkeit ist e der Werth einer Summe, deren Anfang lautet:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots;$$

aus jedem Gliede entsteht das folgende, wenn man den Nenner mit derjenigen ganzen Zahl multiplicirt, welche auf den letzten Factor folgt, in unserem Falle also mit 5, wodurch $\frac{1}{1.2.3.4.5}$ entsteht u. s. f.

Während man den dekadischen Logarithmus einer Zahl a mit $log\ a$ oder $lg\ a$ bezeichnet, versteht man unter $l\,a$ oder $ln\,a$ den natürlichen. Es ist also gleichzeitig:

$$a = 10^{log\ a} \text{ und } a = e^{l\,a}.$$

Wird die letzte Gleichung dekadisch logarithmisirt, so entsteht:

$$log\ a = log\ e^{l\,a} = l\,a\ log\ e.$$

Zwischen dem dekadischen und natürlichen Logarithmus einer Zahl a bestehen also die äquivalenten Beziehungen:

$$log\, a = log\, e\; l\, a; \qquad l\, a = \frac{1}{log\, e}\, log\, a.$$

Man nennt *log e* den *Modulus des dekadischen Systems* und pflegt ihn mit M zu bezeichnen. Dann ist also:

$$log\, a = M\, l\, a; \qquad l\, a = \frac{1}{M}\, log\, a,$$

für $a = 10$ ist $log\, 10 = 1$,

also ist

$$1 = M\, l\, 10,$$

d. h.

$$M = \frac{1}{l\, 10} = 0.434\,294\ldots$$

Von den mathematischen Gröfsen und ihren Coordinaten, d. h. zugeordneten Zahlen.

28. Die reine Mathematik beschäftigt sich in ihren Anfängen mit den von ihr erfundenen Zahlen und den „einfachen Ausdrücken“. Einfache Ausdrücke schreiben eine bestimmte, ausführbare Operation vor, welche mittels zweier Zahlen vorgenommen werden und als Resultat eine bestimmte dritte Zahl liefern soll: eine ganze, oder gebrochene, oder irrationale Zahl. Diese Ausdrücke haben die Bezeichnung erhalten: $a + b$; $a - b$; $a\, b$; $a : b = \frac{a}{b}$; a^b; $\sqrt[b]{a}$; $\overset{a}{log}\, b$ für die Basis a.

Indem man in den einfachen Ausdrücken wiederum solche an Stelle der Zahlen setzt, gelangt man zu zusammengesetzten Ausdrücken; und indem man letztere, welche stets wieder bestimmte Zahlen liefern, unter einander oder mit den ursprünglichen Zahlen verbindet, und beliebig fortfährt oder abbricht, erhält man in jedem Falle das, was man einen *analytischen Ausdruck* oder schlechtweg einen *Ausdruck* nennt. Führt man sämmtliche durch einen Ausdruck vorgeschriebenen und als möglich erkannten Operationen aus, so gelangt man zu einer bestimmten Zahl a und setzt $A = a$, wenn A den Ausdruck bedeutet. So ist z. B.

$$A = (\sqrt[3]{b} + c\, d) : n = a \text{ ein Ausdruck;}$$

setzt man darin $b = 27$; $c = 4$; $d = 23$; $n = 15$, so wird $\sqrt[3]{27} = 3$; $cd = 92$; also $\sqrt[3]{27} + 4.23 = 95$.

$$95:15 = \frac{95}{15} = \frac{19.5}{3.5} = \frac{19}{3},$$

und es ergibt sich:

$$A = \frac{19}{3} = 6 + \frac{1}{3} = a.$$

Die *Zahl a*, zu welcher ein Ausdruck A führt, heifst der *Werth des Ausdrucks*. Das *Zeichen* der Zahl kann + oder — sein. Läfst man dasselbe fort, so heifst die daraus hervorgehende Zahl der *absolute Betrag* oder der *numerische Werth sowohl des Ausdrucks wie der ihm äquivalenten Zahl.*

Die mathematische Wissenschaft beruht auf der Grundlage der von ihr geschaffenen Zahlen und der mit letzteren auszuführenden Operationen. Sie erscheint demnach völlig losgelöst von dem übrigen Inhalt des menschlichen Daseins; und es gibt in der That Puritaner, welche die Reinheit dieser Wissenschaft durch deren Weltabgeschiedenheit erhalten sehen möchten. Zu einem gebietenden Factor der menschlichen Cultur ist die Mathematik aber erst dadurch geworden, dafs ihre Zahlen zu Trägern von Begriffen gemacht werden konnten, welche der Schöpfer in staunenerregender Fülle über die Natur und die menschliche Vernunft ausgestreut hat. Diese Begriffe heifsen deshalb mit Recht *„mathematische Gröfsen"*; in *ihren* Dienst hat die Mathematik die disciplinirte Kraft ihrer Zahlen gestellt, und dadurch hat sie sich die Welt erobert; sonst wäre sie ein kleines Königreich geblieben, von Allen respectirt, von den Meisten gemieden, von Wenigen erforscht.

Das Wesen der mathematischen Gröfsen wird sehr anschaulich an dem Beispiel einer *„Strecke"*, d. h. eines Abschnitts auf einer geraden Linie erläutert (s. Nr. 33., 34.).

Eine Strecke kann in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, die selbst wieder congruente Strecken sind, zerfällt werden; dieser Procefs läfst sich deshalb für jeden Theil wiederholen, und so kann man unbegrenzt fortfahren. Eine gegebene Strecke kann also in eine Anzahl von a congruenten Theilen zerfällt werden, welche selbst wieder Strecken sind, und deren Anzahl a gröfser

gemacht werden kann als eine beliebig gegebene noch so grofse Zahl. Aus dieser Eigenschaft heraus ist jede Strecke eine mathematische Gröfse.

Im erweiterten Sinne soll jedes gegebene Concrete oder Abstracte eine *mathematische Gröfse* heifsen, wenn es *in eine unbegrenzt grofse Anzahl von Theilen zerfällbar ist, welche sich nur durch ihre Lage im Raum oder in der Zeit unterscheiden und als Identitäten bezeichnet werden sollen.*

Ein gegebenes Etwas ist also eine mathematische Gröfse, wenn es für *jede* ganze Zahl a in a Identitäten zerfällbar ist.

Alle wissenschaftlichen Disciplinen, deren Grundbegriffe mathematische Gröfsen sind, heifsen *exacte Wissenschaften.* Auch die Geometrie kann dieser Auffassung unterworfen werden und heifst alsdann *analytische Geometrie*, im Gegensatz zu einer anderen Auffassung, welche als *Geometrie der Lage* bezeichnet wird.

29. Zwei mathematische Gröfsen heifsen *gleichartig*, wenn *die eine derselben und ein Theil der anderen ein Identitätenpaar liefern.*

Man nennt eine Gröfse A gröfser als eine gleichartige Gröfse B, wenn B ein Theil von A ist; alsdann heifst B kleiner als A, wofür die Zeichen gelten

$$B < A \quad \text{und} \quad A > B.$$

Jeder mathematischen Gröfse A läfst sich eine Zahl a in der Weise zuordnen, dafs, wenn B eine zweite gleichartige Gröfse ist, und b die ihr zugeordnete Zahl, stets $a > b$ ist, wenn $A > B$ ist und umgekehrt. a heifst der *Werth* von A, b der Werth von B.

Das Princip der Zuordnung ist folgendes:

Unter der Gesammtheit gleichartiger Gröfsen wählen wir beliebig eine aus und nennen sie Normal- oder Einheitgröfse N. Bezeichnen wir mit $\frac{1}{\alpha}N$ den α^{ten} Theil von N, so soll $\frac{a}{\alpha}$ der Werth derjenigen Gröfse heifsen, welche in a Gröfsen $\frac{1}{\alpha}N$ zerfällbar ist; eine solche Gröfse heifst *commensurabel* mit der Einheit.

Sind a und α nicht r. p. und ist μ ihr gröfster gemeinsamer Theiler, $a = \mu a'$, $\alpha = \mu\alpha'$, so ist $\frac{a'}{\alpha'}$ ein irreductibler Bruch, und es ist ohne Weiteres klar, dafs $\frac{a}{\alpha} = \frac{a'}{\alpha'}$ *derselben* Gröfse A zu-

geordnet sind; denn wenn A aus a' Gröfsen $\frac{1}{\alpha'}N$ besteht, so besteht es auch aus $\mu a'$ Gröfsen $\frac{1}{\mu\alpha'}N$.

Wir werden aber die Werthangabe einer Gröfse stets durch einen irreductiblen Bruch statt durch einen reductiblen machen, falls der Werth überhaupt durch eine rationale Zahl angegeben werden kann. Ist $\alpha' = 1$, so ist $\frac{a'}{\alpha'}$ die ganze Zahl a' und $\frac{1}{\alpha'}N$ wird $= 1 . N = N$, d. h. die Gröfse enthält a' Normalgröfsen N.

Aus der Art der Zuordnung von Werthen zu Gröfsen folgt: wenn $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}$ die Werthe zweier gleichartigen Gröfsen A und B sind, so ist $\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}$ der Werth der Gröfse C, welche in die Gröfsen A und B zerfällbar ist.

30. Ist eine Gröfse J gegeben, welche sich nicht in a Gröfsen $\frac{1}{\alpha}N$ zerfällen läfst, auch wenn α und a noch so grofs gewählt werden, so heifsen J und N *incommensurable Gröfsen.*

In diesem Falle kann man die Normalgröfse N in α gleiche Theile $\frac{1}{\alpha}N$ zerfällen; es gibt dann stets eine ganze Zahl a und zwei Gröfsenwerthe $\frac{a}{\alpha}$ und $\frac{a+1}{\alpha}$, für welche $a\frac{1}{\alpha}N < J < (a+1)\frac{1}{\alpha}N$ ist. Theilt man das überschiefsende Stück $\frac{1}{\alpha}N$ wiederum in β gleiche Theile, so wird J zwischen zwei Gröfsen fallen, deren Werthe $\frac{a}{\alpha} + \frac{a'}{\alpha\beta}$ und $\frac{a}{\alpha} + \frac{a'+1}{\alpha\beta}$ sind. Die Differenz des ersten Werthpaares ist $\frac{1}{\alpha}$ und die des zweiten ist $\frac{1}{\alpha\beta}$. Die zweite Differenz ist also kleiner als die erste, und durch Fortsetzung des Processes läfst sich eine Reihe von Werthpaaren aufstellen, deren Differenz kleiner und kleiner wird. Würde $\beta = \alpha$ gemacht und jedes überschiefsende Stück stets in α gleiche Theile zerfällt werden, so würden die Differenzen der Werthpaare die Reihe bilden $\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \cdots$, woraus hervorgeht, dafs die Differenzen

beliebig klein gemacht werden können. Denn ω mag eine noch so kleine Zahl sein, so gibt es stets eine ganze Zahl n, für welche $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n < \omega$ wird. Die Gröſse J liefert also eine Reihe von Werthpaaren, deren Differenz kleiner und kleiner wird und kleiner gemacht werden kann, als jede noch so kleine Zahl. Der *Werth der, mit der Einheit N incommensurablen Gröſse J* ist also das, was als eine *irrationale Zahl* definirt wurde (Nr. 25).

Ist umgekehrt eine Gröſse J durch einen irrationalen Ausdruck gegeben, dessen Werth auf Grund des gegebenen Ausdrucks, z. B. $\sqrt[3]{7}$, in immer engere Grenzen rationaler Zahlenpaare eingeschlossen werden kann, so wird dadurch J entsprechend immer enger zwischen gleichartige Gröſsenpaare eingeschlossen, welche mit der Einheit commensurabel sind; nie aber kann J selbst mit einer der einschlieſsenden Gröſsen identisch werden. Eine Gröſse, deren Werth ein irrationaler Ausdruck ist, ist also stets incommensurabel in Bezug auf die Normalgröſse.

31. Wir wollen die *Gesammtheit der mathematischen Gröſsen, welche einander gleichartig* sind, als eine Gröſsenklasse bezeichnen; ebenso wollen wir die *Gesammtheit der rationalen und irrationalen Zahlen* als die *Klasse der reellen Zahlen* bezeichnen. Alsdann entspricht, *nach Festlegung einer Normalgröſse, jedem Individuum derselben Gröſsenklasse ein Individuum der reellen Zahlenklasse und umgekehrt.* Aendert man die Normalgröſse, so ändert sich der Werth jeder Vergleichsgröſse, aber wenn zwei Gröſsen in Bezug auf die eine Normalgröſse die Werthe A und B haben, und in Bezug auf die andere Normalgröſse die Werthe A' und B', so liefern $A' : A$ und $B' : B$ *dieselbe* Zahl λ, so daſs also stets $B' = \lambda B$ wird, wenn $A' = \lambda A$ ist.

Zu den wichtigsten Gröſsenklassen gehören die Klasse der Zeitintervalle, der Strecken, der Bogen und der Kreiswege desselben Kreises, der Ebenewinkel, der räumlichen Winkel und der sphärischen Winkel derselben Kugel.

Mit diesen Gröſsenklassen hat es die Theorie der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung vornehmlich zu thun.

Nach den gemachten Auseinandersetzungen können die Werthe irgend einer Klasse von mathematischen Gröſsen stets nur positive

Zahlen sein. Wenn aber, wie dies in der Geometrie (und auch anderswo) vorkommt, nicht *alle* Individuen derselben Gröfsenklasse betrachtet werden, sondern nur solche, welche eine bestimmte Lagebedingung erfüllen, so darf man mit Vortheil auch die negativen Zahlen für die Zuordnung zu den Gröfsen verwerthen. Dieser Fall tritt ein, wenn es unter den in Betracht kommenden ausgewählten Individuen der mathematischen Gröfsen stets nur *zwei* gibt, welche *denselben Werth*, aber *eine verschiedene Lage* haben. Dann kann man beide dadurch unterscheiden, dafs man den Werth der einen mit dem Zeichen $+$, den Werth der andern mit dem Zeichen $-$ versieht. Man nennt dann die durch $+$ charakterisirte Gröfse eine *positive Gröfse* und die durch $-$ charakterisirte Gröfse eine *negative Gröfse.* Die Ausdrucksweise ist also rein *conventionell.* Dies mufs betont werden, damit die Grübelei über das Wesen negativer Gröfsen, welche an und für sich gar nicht existiren, im Anfang erstickt wird.

Imaginäre und complexe Zahlen.

32. Die Gesammtheit der ganzen, rationalen und irrationalen Zahlen wurde als die Klasse der *reellen Zahlen* bezeichnet.

Anderer Zahlen, als dieser, bedarf man nicht, um jedem Individuum derselben Gröfsenklasse eine Zahl zuzuordnen, welche als sein Werth bezeichnet wurde.

Die Unmöglichkeit, unter allen Umständen durch Subtraction zweier Zahlen zu einer dritten Zahl zu gelangen, so lange wir nur natürliche Zahlen kannten, hatte zur Aufstellung der negativen ganzen Zahlen geführt; die analoge Unmöglichkeit für die Division zu den gebrochenen Zahlen; die analoge Unmöglichkeit für die Radicirung zu den irrationalen Zahlen.

Eine neue Unmöglichkeit tritt uns entgegen, wenn wir nach der Quadratwurzel von negativen Zahlen fragen?

Auf diese Frage läfst sich gleichfalls eine Antwort geben, wenn man eine neue Zahlenklasse schafft, welche aus dem Symbol

$$a + ib$$

entsteht. Hierin bedeuten a und b irgend zwei reelle Zahlen.

Verbindet man zwei dieser Symbole, z. B. $a + ib$ und $c + id$, durch unsere Operationszeichen, so verfährt man rechne-

risch so, als wäre i eine reelle Zahl, ersetzt aber jede n^{te} Potenz von i durch das, was die n^{te} Potenz von $\sqrt[2]{A}$ liefert, wenn darin $A = -1$ und $i = \sqrt[2]{-1}$ gesetzt wird.

Demgemäſs wird:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1, \quad i^5 = +i \ldots$$

Man nennt ib eine *rein imaginäre Zahl*, $a + ib$ eine *complexe Zahl*, a ihren *reellen*, ib ihren *imaginären Theil.*

Analog wie die reellen Zahlen den Punkten einer Geraden zugeordnet wurden, so lassen sich die complexen Zahlen den Punkten einer Ebene zuordnen. Dies geschieht mit Hilfe eines rechtwinkligen ebenen Coordinatensystems (Nr. 49); der Zahl $a + ib$ entspricht der Punkt $x = a$, $y = b$. Dadurch erhält jede complexe Zahl ihre bestimmte Stellung gegen alle übrigen complexen Zahlen, sowie auch gegen die rein imaginären und reellen Zahlen.

Die Thatsache, daſs es keine realen mathematischen Gröſsen gibt, denen die complexen Zahlen coordinirt werden können, hat die complexen und imaginären Zahlen in eine gewisse Mystik getaucht, deren sie als freie Erfindungen des menschlichen Geistes durchaus nicht bedürfen.

Die Erklärung dürfte darin zu suchen sein, daſs manche Ausdrücke, deren wir uns in Bezug auf die Zahlen bedienen, nur bildlich sind und nur dann sachlich genommen werden dürfen, wenn mathematische Gröſsen an Stelle von Zahlen treten.

Wir sagen: die Zahl a läſst sich mittels der ganzen Zahl α in α gleiche Zahlen $\frac{a}{\alpha}$ zerfällen. Dies ist bildlich gesprochen auf Grund der Thatsache:

Eine mathematische Gröſse, deren Werth a ist, läſst sich mittels der ganzen Zahl α in α Theilgröſsen zerfällen, deren jede den Werth $\frac{a}{\alpha}$ hat.

In der bildlichen, auf Zahlen bezogenen Sprechweise wird die Zahl a einer Gröſse verglichen, während die Zahl α bei dem Vergleich leer ausgeht und Zahl bleibt.

War einmal der erste Schritt in dieser Richtung geschehen, so hatte es nichts Ueberraschendes, daſs sich die Vorstellung ent-

wickeln konnte, als wäre die Zahl 1 anzusehen als die Einheit der „mathematischen Gröfse an sich“. Denn aus der Gesammtheit der in Wirklichkeit oder in unserer Vorstellung existirenden mathematischen Gröfsen durfte diese Abstraction ebenso gut hervorgehen, wie die Abstraction „Baum“ aus der Gesammtheit der Bäume.

Dadurch erhielten die reellen Zahlen einen doppelten Charakter, einmal als Gröfsen der abstracten Einheit, das andere Mal als Zahlen, wie sie im Voranstehenden dargestellt worden sind. In einem zweigliedrigen Product vertrat dann der Multiplicandus die eine Art und der Multiplicator die andere.

Wenn nun bei dieser Doppelauffassung der Zahl eine Erfindung gemacht wurde, wie die der complexen und imaginären Zahlen, so mufste die neue Erfindung wie etwas Ueberirdisches, anderen Welten Angehöriges erscheinen. Denn diesen Zahlen entsprach nichts Reelles mehr; und die Frage nach der Beschaffenheit der imaginären und complexen Einheit führte vor ein unlösbares Räthsel.

Zweiter Abschnitt.

Geometrische Einleitung.

Räumliche Vorstellungen.

33. Die Vorstellung vom *Raum* ist durch Vermittelung unserer Sinne und der Körperwelt in uns zu Stande gekommen. Der Raum ist auf unendlich verschiedene Arten in zwei Theile zerfällbar; die Grenze der beiden Theile heifst *Fläche.* Beispielsweise sondert jeder „Körper“, d. h. ein sinnlich erfafster Theil der Materie, den Raum in einen Theil, welcher von dem Körper erfüllt wird, und in den anderen Theil; die Grenzfläche heifst die *Oberfläche des Körpers.*

Analog ist die Fläche auf unendlich verschiedene Arten in zwei Theile zerfällbar; die Grenze derselben heifst *Linie.*

Ebenso ist die Linie auf unendlich verschiedene Weise in zwei Theile zerfällbar; die Grenze derselben heifst *Punkt.*

Der *Punkt ist auf keine Weise zerfällbar;* er ist lediglich charakterisirt durch seine *Lage, die er mit keinem anderen Punkte theilt;* deshalb ist „Punkt“ gleichbedeutend mit „*Ort im Raum*“.

Die Orte im Raum, welche durch alle möglichen Zerfällungen einer Linie in zwei Theile geliefert werden, heifsen *die Punkte dieser Linie.*

Die Punkte der Linien, welche durch alle möglichen Zerfällungen einer Fläche in zwei Theile geliefert werden, heifsen *die Punkte dieser Fläche.*

Die Punkte der Flächen, welche durch alle möglichen Zerfällungen des Raumes in zwei Theile geliefert werden, heifsen *die Punkte des Raumes.*

Wenn zwei Linien so beschaffen sind, dafs durch Lageveränderung der einen *je ein Punkt derselben* mit *je einem Punkte*

der *anderen denselben* Ort theilt, so nennen wir sie *congruent* und *von gleicher Gestalt oder Form.*

Analoges gilt für zwei Flächen.

Zwei Körper heifsen congruent, wenn ihre Oberflächen congruent sind.

Die Möglichkeit der Lageänderung von Linien und Flächen ist für unsere Vorstellung vorhanden, weil wir uns den Körper, durch dessen Zerfällung die Fläche und die Linie entstanden gedacht wird, verschiebbar im Raum vorstellen können.

34. Der Begriff der *geraden Linie* oder *Geraden* ist undefinirbar. Die Vorstellung von ihr kommt vornehmlich mittels des Gesichtssinnes in uns zu Stande, kann aber von Blindgeborenen durch den Tastsinn gewonnen werden. Unsere Vorstellung von der Geraden ist ausgedrückt mittels des Axioms:

Zwei Geraden, welche zwei Punkte gemein haben, decken sich, d. h. sie liefern dieselben Raumpunkte.

So wenig wie die Linie „Gerade", ist die Fläche „*Ebene*" definirbar. Sie entsteht, wenn sämmtliche Punkte einer Geraden g mit einem Punkt P, welcher nicht zu g gehört, durch Geraden verbunden werden. Die Gesammtheit dieser Geraden bildet die Ebene; und von ihr gilt das in unserer Vorstellung begründete Axiom:

Sind zwei Punkte einer Geraden gleichzeitig zwei Punkte einer Ebene α, so sind alle Punkte der Geraden Punkte dieser Ebene.

Schaaren von Geraden, Ebenen u. s. w.

35. In einer *beliebigen Ebene* α lassen sich unendlich viele *Geraden* ziehen. Diejenigen, welche durch einen Punkt C von α gehen, bilden eine *Geradenschaar mit dem Centrum C.* Jede Gerade der Schaar wird durch C in zwei Theile zerlegt, welche von C aus in zwei *entgegengesetzten Richtungen* verlaufen; jeder derselben heifst ein *Strahl von C*, und *der eine der Gegenstrahl des anderen.* Zwei Gegenstrahlen bilden also eine Gerade. Die Strahlen der Geradenschaar C bilden die *Strahlenschaar* C der Ebene α.

Im *Raum* sind unendlich viele *Ebenen* enthalten. Diejenigen, welche durch dieselbe *beliebig gewählte* Gerade a gehen, bilden die *Ebenenschaar der Axe a.* Jede Ebene der Schaar wird durch a in zwei Theile zerlegt; jeder Theil heifst *ein Flügel der*

Axe oder Kante a und *der eine heifst der Gegenflügel des anderen.* Zwei Gegenflügel bilden also eine Ebene.

Die Flügel der Ebenenschaar a bilden die *Flügelschaar* a; alle ihre Flügel haben also die Gerade a als *gemeinsame Kante.*

Die Orte im Raum, welche mit einem Punkte M congruente Strecken — *Radien* — bestimmen, bilden eine *Kugelfläche um den Mittelpunkt* M. Eine analoge Auswahl für Punkte der Ebene liefert einen *Kreis.*

Jede Gerade a, welche durch den Mittelpunkt C einer Kugel geht, schneidet diese in zwei Kugelpunkten AA', welche *Gegenpunkte* heifsen. Das Stück $\overline{AA'}$ der Geraden a heifst ein *Durchmesser* der Kugel.

Jede Ebene, welche eine Kugel schneidet, liefert einen *Kreisschnitt.* Geht die Ebene durch das Centrum, so haben Kugel und Kreis congruente Radien und gemeinsames Centrum; solche Kreise heifsen *Hauptkreise oder gröfste Kreise* der Kugel. Alle anderen Kugelkreise heifsen *Nebenkreise oder kleine Kreise.* Jeder Punkt im Inneren der Kugel ist der Mittelpunkt eines Nebenkreises; sein Radius ist ein um so kleinerer Theil des Kugelradius, je weiter der Punkt vom Kugelcentrum absteht.

Die Ebenen zweier Hauptkreise enthalten stets einen gemeinsamen Durchmesser, dessen Endpunkte Gegenpunkte sind, und jeden der beiden Kreise in zwei Halbkreise zerlegen. Deshalb *halbiren sich zwei Hauptkreise gegenseitig.*

Kugelkreise heifsen *parallel*, wenn ihre Ebenen parallel sind. Alle Nebenkreise, welche demselben Hauptkreise parallel sind, heifsen Parallelkreise desselben oder Parallele (Singular: der Parallel).

Jede Ebene durch a schneidet die Kugel in einem Kreise, für welchen AA', Gegenpunkte sind.

Die Kreise, in welchen die Kugel von der *Ebenenschaar* a geschnitten wird, bilden die *Kreisschaar* AA'; A und A' heifsen die *Pole oder Scheitel*; durch die Flügelschaar a wird die *Halbkreisschaar* AA' bestimmt; jeder der beiden Halbkreise, in welche ein Kreis der Schaar AA' durch die Pole zerlegt wird, heifst der *Gegenhalbkreis* des anderen.

Die Punkte, welche ein beliebiger Kreis k aus den Punkten einer Ebene aussondert, wollen wir als die *cyklische Punktschaar* k bezeichnen.

36. Für unsere Betrachtungen sind besonders wichtig:

1. Strahlenschaaren, 2. Flügelschaaren, 3. Halbkreisschaaren, 4. Cyklische Punktschaaren.

Bei jeder Schaar unterscheiden wir *Element* und *Träger.*

1. Strahlenschaar: Element ein *Strahl*; Träger eine *Ebene.*

2. Flügelschaar: Element ein *Flügel*; Träger der *Raum.*

3. Halbkreisschaar: Element ein *Halbkreis*; Träger eine *Kugel* desselben Radius.

4. Cyklische Punktschaar: Element ein *Punkt*; Träger ein *Kreis.*

Wählt man in jeder der vier Schaaren irgend zwei Elemente aus, so *zerfällt ein solches Elementenpaar den Träger der Schaar in zwei Theile,* welche *zusammen* den Träger darstellen, also nicht von einander unabhängig sind und deshalb *conjugirt* heifsen sollen.

Die einzelnen Fälle liefern:

1. Die *Strahlenschaar C.* Das Elementenpaar ist ein Strahlenpaar s, t; es zerfällt den Träger, die Ebene, in zwei Theile: sie heifsen *conjugirte Ebenewinkel*, C ihr *Scheitel*, r und t ihre *Schenkel*; der kleinere Winkel heifst der *Concavwinkel* (s, t); der gröfsere der *Convexwinkel.* Sind s und t Gegenstrahlen, so werden die conjugirten Winkel *congruent* und heifsen *gestreckte Winkel.*

2. Die *Flügelschaar a.* Das Elementenpaar ist ein Flügelpaar σ, τ; es zerfällt den Träger, den Raum, in zwei Theile: sie heifsen *conjugirte Raumwinkel*, a ihre *Kante*, σ und τ ihre Winkelflügel. Wie bei Ebenewinkeln werden *Concav-*, *Convex-*, *gestreckte Winkel* unterschieden.

3. Die *Halbkreisschaar* AA'. Das Elementenpaar ist ein Halbkreispaar, es zerfällt den Träger, die Kugel, in zwei Theile: sie heifsen *conjugirte sphärische* oder *Kugelwinkel*; AA' heifsen die *Scheitel des Winkels*; die beiden Halbkreise seine *sphärischen Schenkel.* Wie vorher werden auch hier *Concav-*, *Convex-*, *gestreckte Winkel* unterschieden.

4. *Cyklische Punktschaar k.* Jedes Punktpaar S, T liefert ein Elementenpaar und zerfällt den Träger, den Kreis k, in zwei Theile: sie heifsen *conjugirte Kreisbogen.* Da jeder gestreckte Winkel die Hälfte seines Trägers ist, so ist das Analogon für die conjugirten Kreisbogen die Hälfte des Kreises, d. h. der *Halbkreis.*

Alsdann müssen S und T auf einem Durchmesser des Kreises liegen, weil jeder Durchmesser den Kreis in zwei congruente Theile zerlegt. Die Hälfte eines Halbkreisbogens heifst ein *Quadrant des Kreises*, als vierter Theil des Kreises. Bestimmt das Punktpaar S, T einen Quadranten, so sagt man: *S und T haben Quadrantenabstand.*

Jeder gestreckte Winkel läfst sich gleichfalls in zwei congruente Winkel zerfällen; sie heifsen *rechte Winkel* oder *Rechte.* Zerfällt man den gestreckten Winkel in zwei nichtcongruente Winkel, so heifst der kleinere ein *spitzer*, der gröfsere ein *stumpfer Winkel* und der eine der *Nebenwinkel des anderen.*

Dies gilt für alle drei Winkelarten (Ebene-, Raum-, Kugelwinkel).

Zwei Winkel derselben Art, welche, passend aneinandergelegt, einen gestreckten Winkel bilden, heifsen *supplementär*; liefern sie einen rechten Winkel, so heifsen sie *complementär.*

Zwei Geraden, welche einen Punkt C gemeinsam haben, bestimmen eine Ebene und zerlegen dieselbe in vier Concavwinkel.

Zwei Kreise (in zwei verschiedenen Ebenen), welche einen Durchmesser d gemeinsam haben, bestimmen eine Kugel und zerlegen dieselbe in vier sphärische Concavwinkel.

Zwei Ebenen, welche eine Gerade a gemeinsam haben, zerlegen den Raum in vier concave Raumwinkel.

In allen drei Fällen gilt für *jeden* der vier Winkel Folgendes: jeder der beiden Nachbarwinkel ist ein Supplementwinkel und zwei nichtbenachbarte Winkel (Scheitelwinkel) sind congruent. Folglich: ist *einer* der vier Concavwinkel ein *Rechter*, so sind es auch *die drei anderen.*

Normallagen.

37. Wenn zwei Geraden mit einem gemeinsamen Punkte, zwei Kreise mit einem gemeinsamen Durchmesser, zwei Ebenen mit einer gemeinsamen Geraden vier rechte Concavwinkel der Ebene, der Kugel, des Raumes bestimmen, so sagt man: sie liegen *normal* zu einander.

Dagegen heifsen zwei *Geraden* derselben Ebene, welche keinen Schnittpunkt besitzen, *parallel* ($\neq$); ebenso zwei *Ebenen*, welche keine Schnittgerade besitzen.

Ist in der Ebene α eine Geradenschaar C gegeben, so gibt es im Raum stets *eine und nur eine Gerade* a *durch* C, welche *normal* liegt zu *allen* Geraden der Schaar C. Der Beweis beruht darauf, daſs gleiche Nebenwinkel Rechte sind. a heiſst die *Normale der Ebene* α im Punkte C und α *heiſst die Normalebene der Geraden* a.

Zuordnung von Winkeln und Bogen.

38. In einer Ebene α sei ein Concavwinkel w gegeben, mit dem Scheitel C und den Schenkeln (Strahlenpaar) s und t. Es sei k ein Kreis in α, mit dem Centrum C und dem beliebig gewählten Radius r; S und T seien die Schnittpunkte des Kreises k mit s und t. Der in dem Ebenewinkel w verlaufende Bogen $\widehat{ST}$ des Kreises k sei b. Alsdann heiſsen *Winkel* w *und Bogen* b *einander zugeordnet*; w wird der Centriwinkel von b genannt, weil sein Scheitel im Centrum von k liegt.

Es sei Gerade a die Normale der Ebene α in C; Kante a bestimmt mit s einen Flügel $\mathfrak{S}$ und mit t einen zweiten Flügel $\mathfrak{T}$. Alsdann heiſst derjenige, durch die Flügel $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ bestimmte *Raumwinkel* W, welcher w und b enthält, *dem Ebenewinkel* w *und dem Bogen* b *zugeordnet.*

Um C werde die Kugel vom Radius r des Kreises k gelegt. Alsdann liegt Kreis k auf dieser Kugel. Die beiden Flügel $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ schneiden die Kugel in zwei Halbkreisen ASA' und ATA' der Halkreisschaar AA', wenn AA' die Schnittpunkte von a mit der Kugel sind; sie bestimmen den *sphärischen Winkel* K, welcher in dem Raumwinkel W enthalten ist. Alsdann heiſsen *Kreisbogen* b, *Ebenewinkel* w, *Raumwinkel* W, *Kugelwinkel* K *einander zugeordnet.*

Ist *eines* der vier Stücke b, w, W, K (Bogen, Ebene-, Raum-, Kugelwinkel) gegeben, so folgen die *drei anderen* eindeutig daraus mittels einfacher geometrischer Construction.

Ist $s'\,t'$ ein anderes Strahlenpaar von α mit dem Centrum C, so werden dadurch vier andere, einander zugeordnete Stücke: b', w', W', K' bestimmt. Ist von diesen Stücken *eines*, z. B. b', dem gleichartigen Stücke der ersten Gruppe, also dem Stück b, congruent, so sind auch die übrigen gleichartigen Stücke der beiden Gruppen congruent; also w und w', W und W', K und K'.

Ist der Ebenewinkel w ein *Rechter*, so liegen die Strahlen s und t normal; sie theilen mit ihren Gegenstrahlen die Ebene α in vier Rechte, d. h. in vier *congruente* Theile; folglich wird durch die zugeordneten Winkel sowohl der Raum wie die Kugel in je vier congruente Theile, d. h. in rechte Winkel zerlegt. Statt von w auszugehen, hätte man auch von W oder K ausgehen können. Also:

Ist einer der drei Winkel w, W, K ein Rechter, so sind es auch die beiden anderen.

Die zugeordneten vier Bogen des Kreises k sind gleichfalls congruent, also Quadranten. Folglich:

Ist einer der drei Winkel w, W, K ein Rechter, so ist der zugeordnete Bogen b ein Quadrant und umgekehrt:

Ist Bogen b ein Quadrant, so sind die zugeordneten Winkel Rechte.

Zuordnung der Einheiten für Bogen und Winkel.

39. Unter den unendlich vielen Bogen b, welche ein Kreis k besitzt, wollen wir willkürlich einen herausgreifen und als Normal- oder *Einheitbogen* b_ε bezeichnen.

Alsdann bedeutet Bogen $b = \frac{a}{\alpha} b_\varepsilon$ (wenn a und α ganze positive Zahlen sind) den Kreisbogen, welcher entsteht, wenn der Einheitbogen b_ε in α congruente Theilbogen zerlegt wird und a dieser Theilbogen auf dem Kreise an einander gelegt werden (Nr. 29). Es ist also $\frac{a}{\alpha}$ *der Werth des Bogens b in Bezug auf den Einheitbogen* b_ε. Ist $\alpha = 1$, so ist $\frac{a}{\alpha} = \frac{a}{1} = a$ der Werth, d. h. b besteht aus a Einheitbogen b_ε. Ist $a = 1$, so ist $\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$, d. h. b ist der α^{te} Theil von b_ε.

Wenn es nicht möglich ist, durch Zerfällung des Bogens b_ε, selbst in noch so viele congruente Theilbogen, einen Bogen b als Vielfaches eines Theilbogens von b_ε darzustellen, so heifsen b_ε und b *incommensurabel* (Nr. 30). Dann liegt aber b zwischen zwei commensurablen Bogen b_1 und b_2, welche so wenig von einander verschieden sind, dafs wir jeden derselben an Stelle von b setzen

dürfen. Sind $\frac{a_1}{\alpha_1}$ und $\frac{a_2}{\alpha_2}$ die Werthe von b_1 und b_2, so betrachten wir $\frac{a_1}{\alpha_1}$ oder $\frac{a_2}{\alpha_2}$ als den Werth von b; dies ist deshalb erlaubt, weil wir in unseren Rechnungen alle Zahlen, deren Unterschied eine sehr kleine Zahl ist, als gleiche Zahlen betrachten. Die Berechtigung liegt in der Unvollkommenheit unserer Sinne, kleinere Unterschiede aufzufassen und in der Unmöglichkeit, eine Zahl $\frac{a}{\alpha}$ hinzuschreiben, wenn a und α sehr grofs sind.

Nach denselben Principien läfst sich für alle Ebenewinkel w ein Einheitwinkel w_ε, für alle Raumwinkel W ein Einheitwinkel W_ε, für alle Kugelwinkel K ein Einheitwinkel K_ε festsetzen. Dadurch erhält jeder Winkel w einen bestimmten Werth in Bezug auf w_ε, jeder Winkel W einen solchen in Bezug auf W_ε, jeder Winkel K einen solchen in Bezug auf K_ε.

Wir können die Einheitwinkel w_ε, W_ε, K_ε so wählen, dafs sie die *dem Einheitbogen* b_ε *zugeordneten Winkel* sind; dann sollen die vier einander zugeordneten Einheiten als *conforme Einheiten* bezeichnet werden. Sie hängen also ausschliefslich ab von der Wahl des Einheitbogens b_ε; b_ε kann durch den *Werth* μ charakterisirt werden, welchen die Kreislinie, die ja auch ein Kreisbogen ist, in Bezug auf b_ε erhält. Die vier Einheiten sind also eindeutig bestimmt, wenn man sie als *conforme* μ*-Einheiten* bezeichnet. Es folgt nun aus dem Satze, dafs den congruenten Bogen b und b_1 die congruenten Winkel w und w_1, W und W_1, K und K_1 zugeordnet sind, der höchst wichtige Satz:

Hat ein Kreisbogen b *den Werth* $\frac{a}{\alpha}$, *so haben die zugeordneten Winkel* w, W, K **gleichfalls** *den Werth* $\frac{a}{\alpha}$, *wenn die Einheiten* **conform** *sind.*

Die drei gebräuchlichen Arten conformer Einheiten.

40. Man bedient sich in praxi nur dreier verschiedener Einheitbogen b_ε.

Erste Einheit: der 360. Theil der Kreislinie; folglich $\mu = 360$. Diese Einheit heifst der *Grad*; sie werde mit b_ε° bezeichnet. Ihr

entsprechen die zugeordneten Gradeinheiten der Winkel: w_ε^0, W_ε^0, K_ε^0. Ist β ein Werth in Bezug auf die conformen Gradeinheiten, so soll er unter Umständen, der Eindeutigkeit wegen, mit β^0 bezeichnet werden. Der 60. Theil der Gradeinheit heifst *Bogenminute* b'_ε; ist γ ein Werth in dieser Untereinheit, so soll er mit γ' bezeichnet werden. Der 60. Theil der Bogenminute heifst *Bogensecunde* b''_ε; ist δ ein Werth in dieser Untereinheit, so soll er mit δ'' bezeichnet werden.

Man pflegt den Werth b eines Bogens mittels dieser drei Einheiten darzustellen und schreibt beispielsweise $b = 87^0 44' 9{,}8''$; d. h. Bogen b läfst sich zerfällen in einen Bogen von 87^0, einen Bogen von $44'$ und einen Bogen von $9{,}8''$. Der Werth dieses Bogens im reinen Gradmafs ist $\left(87 + \frac{44}{60} + \frac{9{,}8}{60.60}\right)^0$.

Ist der Werth in der Form $\beta^0\ \gamma'\ \delta''$ gegeben, so ist $\beta < 360$, $\gamma < 60$, $\delta < 60$.

Zweite Einheit: der 24. Theil der Kreislinie, also $\mu = 24$. Diese Einheit heifst die *Bogenstunde*, sie werde mit b_ε^h bezeichnet. Ihr entsprechen die zugeordneten Stundeneinheiten der Winkel w_ε^h, W_ε^h, K_ε^h. Der 60. Theil von b_ε^h müfste *Stundenminute* heifsen, heifst aber *Zeitminute* b_ε^m; entsprechend bilden wir w_ε^m, W_ε^m, K_ε^m; demgemäfs heifst der 60. Theil von b_ε^m: *Zeitsecunde* b_ε^s; entsprechend erhalten wir w_ε^s, W_ε^s, K_ε^s.

Ein Werth β in der Stundeneinheit soll mit β^h, ein Werth γ in der Zeitminuteneinheit mit γ^m, ein Werth δ in der Zeitsecundeneinheit mit δ^s bezeichnet werden.

Analog wie bei der Gradeinheit wird der Werth eines Bogens oder Winkels in Bezug auf die Stunde ausgedrückt in der Form $\beta^h\ \gamma^m\ \delta^s$, wo

$$\beta < 24,\ \gamma < 60,\ \delta < 60 \text{ und wo } \left(\beta + \frac{\gamma}{60} + \frac{\delta}{60.60}\right)^h$$

der Werth in der reinen Stundeneinheit ist.

Dritte Einheit: der Kreisbogen von der Länge des Kreisradius. Denkt man sich einen biegsamen, nicht dehnbaren Faden, welcher dem Radius congruent ist, längs des Kreises gespannt, so ist der dadurch bedeckte Bogen der Kreislinie die dritte Einheit der Kreisbogen. Sie heifst die *Einheit des Bogenmafses* und besitzt keine Untereinheiten. Wir bezeichnen sie schlechtweg

mit b_ε und die zugeordneten conformen Einheiten mit w_ε, W_ε, K_ε. *Dieser Einheitbogen und die Kreislinie sind incommensurabel.* μ ist also nur als Näherungswerth ausdrückbar. Man bezeichnet den Werth μ der Kreislinie für die Einheit des Bogenmaſses durch 2π, wo π den Näherungswerth 3,141 592 65 ... besitzt. π läſst sich successive einschlieſsen in eine Reihe von Zahlenpaaren $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, ..., a_i, b_i ... dergestalt, daſs stets $a_i < \pi < b_i$, daſs $b_n - a_n < b_i - a_i$, wenn $n > i$, und daſs, wenn ω eine beliebig kleine Zahl ist, stets ein Zahlenpaar $a_n b_n$ existirt, für welches $b_n - a_n < \omega$ wird. π läſst sich also zwischen zwei Grenzen einschlieſsen, aber nicht durch eine ganze oder gebrochene, d. h. *rationale* Zahl darstellen.

Sind α, β^0, γ^h Werthe *desselben* Bogens oder Winkels in den Einheiten des Bogenmaſses, Grades, der Stunde, so sind je zwei Werthe durch den dritten wie folgt bestimmt:

$$\beta^0 = \frac{180}{\pi}\,\alpha; \quad \gamma^h = \frac{12}{\pi}\,\alpha; \quad \gamma^h = \frac{1}{15}\,\beta^0;$$

$$\alpha = \frac{\pi}{180}\,\beta^0; \quad \alpha = \frac{\pi}{12}\,\gamma^h; \quad \beta^0 = 15\,\gamma^h.$$

Die Werthe eines Quadranten oder rechten Winkels sind $\frac{\pi}{2}$, 90^0, 6^h.

Ist δ'' der Werth des Winkels α (Bogenmaſs) in Bogensecunden, so ist:

$$\delta'' = \frac{180.60.60}{\pi}\,\alpha = 206\,265\,\alpha; \text{ also } \alpha = \frac{\delta''}{206\,265}.$$

Diese Verwandlung wird häufig gebraucht.

Bogen- und Winkelabstände.

41. Sind S und T zwei Punkte des Kreises k, so heiſsen die beiden *Werthe* der durch S, T bestimmten *conjugirten Bogen von k die cyklischen oder sphärischen Abstände der Punkte S, T.*

Hat der eine Bogen die Werthe α, β^0, γ^h und der andere die Werthe $\varkappa$, λ^0, μ^h, so ist $\alpha + \varkappa = 2\pi$, $\beta^0 + \lambda^0 = 360$, $\gamma^h + \mu^h = 24$, weil 2π, 360^0, 24^h die Werthe der Kreislinie sind.

Spricht man schlechtweg von dem *sphärischen Abstand* zweier Punkte, so versteht man darunter den *kleineren* Abstand. Sind S und T zwei Punkte einer *Kugel*, so sind ihre sphärischen Ab-

stände die Werthe der conjugirten Bogen $\widehat{ST}$, welche der durch S und T gelegte Hauptkreis liefert.

Analog versteht man unter den *Abständen* oder *Winkelabständen zweier Strahlen* (*Flügel*, *Halbkreise*) eines Winkel bestimmenden Strahlenpaares (Flügelpaares, Halbkreispaares) die *Werthe der durch dasselbe bestimmten conjugirten Winkel.* Davon wird sehr häufig Anwendung gemacht werden.

Ist a die Normale der Ebene α im Punkte C, und ist s ein beliebig gerichteter Strahl von C, der weder in a noch in α liegt, so bestimmt Kante a und Strahl s den a-Flügel s; derselbe schneide α in dem C-Strahl s_0. Der spitze Winkel (s, s_0) heifst der *Neigungswinkel* des Strahles s gegen Ebene α; sein *Werth heifst die Neigung von s gegen* α, oder auch der *Abstand des Strahles s von der Ebene* α. Strahl s_0 heifst *die Projection von s auf* α. Ist ν^0 die Neigung, so haben die beiden Concavwinkel, welche der Strahl s mit Kante a bestimmt, die Werthe $90 - \nu^0$ und $90 + \nu^0$.

Legt man um C eine Kugel von beliebigem Radius, so liefert die Gerade a auf derselben die Gegenpunkte AA'; Ebene α den Kreis p_α; Strahl s, bezw. s_0, den Punkt S, bezw. S_0, a-Flügel s den Halbkreis ASA'. Letzterer schneidet den Kreis p_α im Punkt S_0. Man nennt p_α *die Polare von* AA'; AA' *die Pole von* p_α und auch *die Scheitel der durch* p_α *getrennten Halbkugeln*; den Werth des Bogens $\widehat{SS_0}$ *den sphärischen Abstand des Kugelpunktes S von* p_α; S_0 *die Projection des Punktes S auf den Kreis* p_α.

Der durch die Pole gelegte Halbkreis ASA' wird durch S_0, also auch durch die Polare p_α, in zwei Quadranten zerlegt; denn jeder der Bogen $\widehat{AS_0}$ und $\widehat{A'S_0}$ ist einem rechten Winkel zugeordnet, weil Ebene α die Normalebene der Kante a ist. Dies gilt für alle Halbkreise AA'; *es haben also alle Punkte der Polare Quadrantenabstand von den Polen.*

42. Denkt man sich im Folgenden alle Geraden und Ebenen durch denselben Punkt C gelegt, und ihren Schnitt mit einer zu C concentrischen Kugel bestimmt, so entspricht jedem Satz über Normale und Normalebene, mittels des gegebenen Begriffs der Zuordnung, ein Satz über Pole und Polare.

Damit diese Sätze in möglichst knapper und durchsichtiger Form ausgesprochen werden können, wird Folgendes festgesetzt:

Sind gerade Linien mit a, b, c bezeichnet, so werden ihre Normalebenen mit α, β, γ, ihre Schnittpunkte auf der Kugel mit AA', BB', CC' und die Polaren dieser Punktpaare mit p_α, p_β, p_γ bezeichnet. Unter einem Punktpaar der Kugel wird stets ein Paar von Gegenpunkten verstanden.

Es soll ferner bedeuten eine α-Gerade: eine Gerade der Ebene α, eine a-Ebene: eine Ebene durch die Gerade a, ein AA'-Kreis: einen Kreis durch die Gegenpunkte AA', ein p_α-Punkt einen Punkt des Kreises p_α; Gerade (β, γ): die Schnittgerade der Ebenen β und γ; Ebene (b, c): die Ebene der Geraden b und c, Punktpaar (p_β, p_γ): die Schnittpunkte der Kreise p_β und p_γ; Kreis (B, C): den durch die Kugelpunkte B und C gelegten Hauptkreis.

Gerade $(\beta, \gamma) \equiv a$, Ebene $(b, c) \equiv \alpha$, Punktpaar $(p_\beta, p_\gamma) \equiv AA'$, Kreis $(B, C) \equiv p_\alpha$ soll bedeuten das Zusammenfallen der durch das Identitätszeichen $\equiv$ verbundenen gleichartigen Elemente.

Alsdann lauten die Sätze, welche sich aus der Normallage der Ebene α und der Geraden a ergeben, also:

	Raum.	*Kugel.*
1.	Jede α-Gerade liegt normal zu a.	Jeder p_α-Punkt hat Quadrantenabstand von AA'.
2.	Jede Gerade normal zu a ist eine α-Gerade.	Jeder Punkt im Quadrantenabstand von AA' ist ein p_α-Punkt.
3.	Liegen zwei Geraden b und c normal zu a, so ist Ebene $(b, c) \equiv \alpha$.	Liegen zwei Punkte B und C im Quadrantenabstand von AA', so ist Kreis $(B, C) \equiv p_\alpha$.
4.	Jede a-Ebene liegt normal zu α.	Jeder AA'-Kreis liegt normal zu p_α.
5.	Jede Ebene normal zu α ist eine a-Ebene.	Jeder Kreis normal zu p_α ist ein AA'-Kreis.
6.	Liegen zwei Ebenen β und γ normal zu α, so ist Gerade $(\beta, \gamma) \equiv a$.	Liegen zwei Kreise p_β und p_γ normal zu p_α, so ist Punktpaar $(p_\beta, p_\gamma) \equiv AA'$.
7.	Die Normalebene jeder α-Geraden ist eine a-Ebene.	Die Polare jedes p_α-Punktes ist ein AA'-Kreis.

8. Die Normale jeder a-Ebene ist eine α-Gerade.	Die Pole jedes AA'-Kreises sind p_α-Punkte.
9. Die Normalen der Ebenenschaar a bilden die Geradenschaar α.	Die Pole der Kreisschaar AA' bilden die cyklische Punktschaar p_α.
10. Die Normalebenen der Geradenschaar α bilden die Ebenenschaar a.	Die Polaren der cyklischen Punktschaar p_α bilden die Kreisschaar AA'.
11. Sind β und γ die Normalebenen der Geraden b und c, so ist Gerade (β, γ) die Normale der Ebene (b, c).	Sind p_β und p_γ die Polaren der Punkte B und C, so sind Punktpaar (p_β, p_γ) die Pole des Kreises (B, C).
12. Sind b und c die Normalen der Ebenen β und γ, so ist Ebene (b, c) die Normalebene der Geraden (β, γ).	Sind BB' und CC' die Pole der Kreise p_β und p_γ, so ist Kreis (B, C) die Polare des Punktpaares (p_β, p_γ).

Coordinatensysteme für die Elemente von „Schaaren“.

43. Als letzte Schaar betrachten wir die *geradlinige Punktschaar; ihr Träger ist eine beliebige Gerade a; ihre Elemente sind die Punkte von a.* Ein beliebiges Punktpaar PQ der Schaar zerfällt den Träger a in ein begrenztes Stück: *Strecke* $\overline{PQ}$, und in zwei Strahlen, welche von P und Q aus in entgegengesetzten Richtungen verlaufen, und die Strecke $\overline{PQ}$ *nicht* enthalten.

Den verschiedenen Strecken, welche durch beliebig gewählte Punktpaare entstehen, läfst sich eine Einheitstrecke s_ϵ zuordnen, in Bezug auf welche jeder Strecke s ein *Werth* zugeordnet ist. Diese Zahl heifst gleichzeitig die *Länge der Strecke* und der *Abstand der Punkte P und Q.* Dem Begriff zweier conjugirter Bogen $\widehat{ST}$ auf einem Kreise, wenn S und T Kreispunkte sind, entspricht also auf der Geraden *eine endliche* Strecke und der *aufserhalb letzterer vorhandene Theil der Geraden a.*

Man kann auf a beliebig einen Punkt O annehmen und als *Ursprung* bezeichnen und die beiden O-Strahlen von a als *positiven* und *negativen* Strahl unterscheiden. Ist (x) der Abstand eines Punktes P der Geraden a von O, so heifst $x = +(x)$, bezw. $x = -(x)$ die *Coordinate von P*, je nachdem P auf dem

positiven oder negativen Strahl liegt. Durch die Coordinate ist die Lage von P gegeben: ihr *Zeichen* gibt den Strahl, ihr *numerischer Werth* den Abstand von O. Hieraus folgt geometrisch:

Hat ein Punkt P die Coordinate x, ein Punkt Q die Coordinate y, so ist der Abstand $\overline{PQ}$ = dem numerischen Werth von $x - y$ und $y - x$; wo x und y, jedes für sich, beliebig $+$ oder $-$ sein dürfen.

Durch Festsetzung eines Ursprungs, einer positiven und negativen Richtung läfst sich also jedem Element (Punkt) unserer Schaar eine $\pm$ Zahl, Coordinate, in der Weise zuordnen, dafs die Lage des Elements daraus eindeutig ermittelt werden kann. Die gemachte Festsetzung heifst ein *lineares Coordinatensystem der geradlinigen Punktschaar a.*

44. Dieses Princip läfst sich nun auf alle *Schaaren* anwenden, deren Elemente *Strahlen*, *Flügel*, *Halbkreise* oder *Punkte einer cyklischen Punktschaar* sind. Der Unterschied ist nur der, dafs wir hier für jedes Element scheinbar *zwei* Coordinaten erhalten, eine *positive* und *negative*. Da aber die eine aus der anderen folgt, so genügt in Wirklichkeit *eine* Zahl zur Festlegung des Elementes.

Für jede Schaar entsteht ein Coordinatensystem dadurch, dafs ein beliebiges Element als *Ursprung* fixirt wird, und dafs die beiden Drehungen, welche ein drehbar gedachtes Element: Strahl, Flügel, Halbkreis um das Strahlencentrum, die Axe, die Pole ausführen kann, als *positive und negative Drehung* unterschieden werden. Ebenso unterscheidet man für die cyklische Punktschaar den *positiven und negativen Kreissinn.*

Alsdann heifst der im *positiven* Sinne genommene *Abstand* eines Elementes von dem Ursprung (der ein gleichartiges Element ist) *mit dem Zeichen* $+$ seine *positive Coordinate*, und der im *negativen* Sinne genommene *Abstand* mit dem *Zeichen* $-$ seine *negative* Coordinate.

Es sei als Beispiel eine Flügelschaar gegeben, und es sei die Gradeinheit für die Winkelwerthe zu Grunde gelegt.

Hat ein Flügel den positiven Abstand (α^0) [wo $(\alpha) < 360$], so ist $+(\alpha^0)$ die positive Coordinate; daraus folgt die negative Coordinate ohne Weiteres; denn wenn (α^0) der positive Abstand ist, so ist $360 - (\alpha^0)$ der negative. Die negative Coordinate ist also $= -(360 - \alpha^0) = +(\alpha^0) - 360$.

Wäre die Stundeneinheit zu Grunde gelegt und wäre (α^h) [wo $(\alpha) < 24$] der *negative* Abstand, so ist $24 - (\alpha^h)$ der positive Abstand; es ist also $-(\alpha^h) + 24$ die positive und $-(\alpha^h)$ die negative Coordinate.

Ist für die Einheit des Bogenmafses (α) der *positive* Abstand, $[\alpha < 2\pi]$, so ist $(2\pi - \alpha)$ der negative; es ist also $+(\alpha)$ die positive, $-(2\pi - \alpha) = +(\alpha) - 2\pi$ die negative Coordinate.

Wir nennen eine *Strahlenschaar der Ebene* α, *eine cyklische Punktschaar des Kreises* k, *eine Flügelschaar der Axe* a, *eine Halbkreisschaar der Kugel* K *einander zugeordnet*, wenn k ein Hauptkreis von K ist und in α liegt; wenn das Centrum C der Strahlenschaar α mit dem Centrum des Kreises k und der Kugel K zusammenfällt; wenn die Axe a durch C geht und die Kugel in den Polen AA' der Halbkreisschaar schneidet; wenn a die Normale von α ist. Alsdann ist Kreis k die Polare von AA'.

Für solche Schaaren heifst je ein Element der einen Schaar je einem Element der drei anderen Schaaren zugeordnet, wenn die vier Elemente demselben Flügel angehören.

Setzen wir für ein beliebiges Coordinatensystem einer Schaar fest, dafs der Ursprung jeder der drei anderen Schaaren dem Ursprung der ersten Schaar zugeordnet sein soll, und dafs die positive Drehung eines drehbaren a-Flügels durch seinen Schnitt mit α, k und K den positiven Drehungssinn für die Strahlen-, Halbkreis- und cyklische Punktschaar bestimmt, so heifsen *diese vier Coordinatensysteme einander zugeordnet.* Betrachtet man nun irgend vier einander zugeordnete Elemente der vier Schaaren, so ergibt sich für conforme Einheiten, dafs ihre positiven Coordinaten durch *dieselbe positive Zahl* und ihre negativen Coordinaten durch *dieselbe negative Zahl* geliefert werden.

45. In den Anwendungen kommt es häufig vor, dafs die Coordinate eines Elementes in der Form $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$ gegeben ist. Hier bedeuten $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ zwei Zahlen, deren jede beliebig $+$ oder $-$ sein darf, und deren numerischer Betrag die absoluten Zahlen (α) und (β) sind. Dann liefert, auf Grund von Nr. 6., $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$ die Coordinate desjenigen Elements, welches vom Element $\tilde{\alpha}$ den positiven oder negativen Abstand (β) hat, je nachdem $\tilde{\beta} = \pm(\beta)$ ist.

Polar-Coordinatensysteme für die Elemente eines Strahlenbüschels.

46. Aus den betrachteten Coordinatensystemen der fünf Schaaren: Flügel-, Halbkreis-, Strahlen-, cyklische und geradlinige Punktschaar, lassen sich erweiterte Coordinatensysteme ableiten, welche für uns von grofser Bedeutung sind.

Wir nennen die Gesammtheit der Strahlen, welche von einem Raumpunkte C ausgehen, den *Strahlenbüschel C.* Sein Element ist der Strahl, und es können demselben *zwei Zahlen zugeordnet* werden, durch welche seine Lage eindeutig erhalten wird.

Legt man durch C eine beliebige Gerade a, so kann man für die Flügelschaar a ein Coordinatensystem festlegen. Durch einen beliebigen Strahl s des Büschels geht alsdann ein bestimmter a-Flügel, dessen positive Coordinate die $+$ Zahl ϑ^0 sei, für Gradmafs; also ist $-\beta^0 = \vartheta^0 - 360^0$ die negative Coordinate. Wir nennen alsdann $+\vartheta^0$, $-\beta^0$ die *positive und negative Polar-Abscisse des Strahles s.*

Durch die Normalebene α der Geraden a im Punkt C wird der Raum in zwei Hälften zerlegt. Wir nennen die *eine die positive, die andere die negative Hälfte* und trennen entsprechend die Strahlen des Büschels C in *positive und negative Strahlen.* Den a-Flügel s nennen wir den *Ordinatenflügel des Strahles s*; sein Schnitt mit der Ebene α, welche *Abscissenebene* heifsen soll, sei der Strahl s_0. Dann ist der Werth (ω^0) des spitzen Winkels (s, s_0) die *Neigung des Strahles s gegen die Abscissenebene* (Nr. 41). Ist s ein positiver, bezw. negativer Strahl, so heifst $+(\omega^0)$, bezw. $-(\omega^0)$ die *Polar-Ordinate* ω^0 des Strahles s.

Die beiden Zahlen α^0 (und auch $\alpha^0 - 360^0$) und ω^0 heifsen die *Polar-Coordinaten* des Strahles s in Bezug auf die gemachten Festsetzungen, welche ihrerseit ein *Polar-Coordinatensystem für den Strahlenbüschel C* heifsen.

Die Lage von s kann eindeutig aus einer seiner Polar-Abscissen und seiner Polar-Ordinate abgeleitet werden. Denn jede der beiden Abscissen liefert den Flügel, welchem s angehört; das Zeichen von ω^0 giebt die Raumhälfte, welcher s angehört, und der numerische Betrag von ω^0 gibt den Abstand des Strahles s von dem Strahl s_0.

Sphärische Coordinatensysteme für die Punkte einer Kugel.

47. Jeder Strahl eines Strahlenbüschels C bestimmt einen Punkt auf einer beliebigen concentrischen Kugel; also mufs eine analoge Betrachtung zu einem *sphärischen Coordinatensystem* führen. Mittels desselben sind jedem Punkte einer Kugel eine *sphärische Abscisse und Ordinate* zugeordnet, aus welchen die Lage des Punktes abgeleitet werden kann. Hierfür dienen folgende Festsetzungen.

Auf der Kugel mit dem Centrum C wird ein Paar von Gegenpunkten als *positiver und negativer Pol* A und A' unterschieden; die Halbkugel, deren Scheitel der positive Pol ist, heifst die *positive*, die andere die *negative Halbkugel.* Für die *Halb*kreisschaar AA', deren Elemente *Ordinatenkreise* heifsen, wird ein *Ursprung und der eine Drehungssinn als positiver*, der *andere als negativer* festgesetzt, die Polare von AA' heifst der *Abscissenkreis.*

Legen wir durch einen Kugelpunkt S den Ordinatenhalbkreis der positiven, bezw. negativen Abscisse ϑ, so heifst ϑ die positive, bezw. negative *sphärische Abscisse* von S. Ist A_0 der Schnitt des Ursprungs (Ordinatenkreis) mit dem Abscissenkreis und S_0 die Projection von S auf letzteren, so ist die *cyklische* Coordinate von S_0, für Ursprung A_0 und übereinstimmenden Drehungssinn, gleichfalls $= \vartheta$ (Nr. 44, Ende). Hat der Kugelpunkt den Abstand (ω) vom Abscissenkreis (Bogen $\widehat{SS_0}$), so heifst $\omega = \pm(\omega)$ die *sphärische Ordinate* von S, je nachdem S der *positiven* oder *negativen* Halbkugel angehört.

Legt man um den Mittelpunkt C eines Polar-Coordinatensystems eine Kugel, so bestimmt dasselbe auf letzterer ein *zugeordnetes sphärisches Coordinatensystem.* Dem positiven und negativen Strahl der Abscissenaxe a entspricht der positive und negative Pol A und A'; der Abscissenebene entspricht der Abscissenkreis, jedem Ordinatenflügel ein Ordinatenkreis; die positive Drehung des Ordinatenkreises wird gleichstimmig mit der positiven Drehung des Ordinatenflügels festgesetzt. Ist alsdann S der Kugelpunkt des Strahles s vom Büschel C, so ist die *Polar-Abscisse* von s gleich *der sphärischen Abscisse von* S, und die *Polar-Ordina* von s gleich *der sphärischen Ordinate von* S.

Polar-Coordinatensysteme für die Punkte einer Ebene α und des Raumes.

48. Ist eine Strahlenschaar C der Ebene α gegeben und ein Coordinatensystem dafür festgelegt, so bestimmt jeder Punkt P der Ebene einen Strahl p, dessen Coordinate die *Abscisse* von P heifst; Strecke $\overline{CP}$ heifst der *Radius vector* von P. Die Abscisse und die Länge r des Radius vector heifsen die *Polar-Coordinaten* des Punktes.

Diese Betrachtung läfst sich mittels eines Polar-Coordinatensystems für einen Strahlenbüschel C und mittels des Radius vectorbegriffs auf *alle Punkte des Raumes* übertragen; in diesem Falle erhalten wir *drei* lagebestimmende Coordinaten.

Rechtwinklige Coordinatensysteme für die Punkte einer Ebene und des Raumes.

49. Zur Bestimmung der Lage von Punkten einer Ebene dient ein zweites System, das *rechtwinklige ebene Coordinatensystem.* Die Festsetzungen hierfür sind völlig analog denen eines sphärischen Coordinatensystems für die Punkte einer Kugel: an Stelle des *Abscissenkreises der Kugel* tritt *eine Gerade der Ebene, die Abscissenaxe* X; an Stelle der Ordinatenkreise, welche normal zum Abscissenkreise liegen, treten die *Ordinatengeraden*, welche normal zur Abscissenaxe liegen. Irgend eine der Ordinatengeraden wird willkürlich zum Ursprung der Abscissenzählung gemacht. Diese Gerade heifst die *Ordinatenaxe* Y; ihr Schnittpunkt mit X heifst der *Anfangspunkt oder Ursprung* O des Systems. An Stelle der durch den Abscissenkreis gelieferten *beiden Halbkugeln* treten die durch die Abscissenaxe X gelieferten *Hälften* (*Flügel*) *unserer Ebene.* Demgemäfs wird willkürlich der *eine* X-Flügel als *positiver*, der *andere als negativer Flügel* bezeichnet.

Das Analogon zu der positiven und negativen Drehung eines Ordinatenkreises um die Pole ergibt sich, wenn man diese Drehung als eine Bewegung auffafst, bei welcher derselbe Punkt des Ordinatenkreises *den Abscissenkreis beschreibt*, während der Ordinatenkreis seine *normale Lage gegen letzteren beibehält.* Die

analoge Bewegung einer beweglich gedachten Ordinatengeraden besteht darin, dafs ihr *Schnittpunkt mit der Abscissenaxe auf letzterer sich fortbewegt,* während die *Ordinatengerade ihre normale Lage gegen die Abscissenaxe beibehält.*

Die Bewegung des Schnittpunktes kann in den entgegengesetzten Richtungen erfolgen, welche durch die beiden, von O ausgehenden Strahlen der Abscissenaxe gegeben sind. Wir nennen den einen den positiven Strahl $\overset{+}{X}$, den anderen den negativen Strahl $\overline{X}$. Ebenso soll die Ordinatenaxe Y durch O in einen positiven Strahl $\overset{+}{Y}$ und in einen negativen Strahl $\overline{Y}$ zerlegt werden, entsprechend ihrer Lage in dem positiven oder negativen Flügel der X-Axe.

Jede Ordinatengerade ist der Ordinatenaxe Y parallel. Parallele Geraden bilden keinen Winkel, besitzen also keinen Winkelabstand. Unter *Abstand zweier Parallelen* wird der *Abstand der Punkte* verstanden, in welchem beide von einer *gemeinsamen Normalen* geschnitten werden; wir wählen für letztere die Abscissenaxe.

Es besitzt also jede Ordinatengerade einen bestimmten Abstand (x) von der Ordinatenaxe Y. Je nachdem sie den positiven oder negativen Strahl der Abscissenaxe schneidet, soll ihr Abstand als positiv oder negativ bezeichnet werden und $x = +(x)$ oder $x = -(x)$ als die *Coordinate der Ordinatengeraden.* An dieser Stelle hört also die Analogie auf; denn während ein Ordinatenkreis der Kugel sowohl eine positive wie eine negative Coordinate besitzt, ist einer Ordinatengeraden der Ebene nur *eine,* entweder positive oder negative Coordinate zugeordnet.

Durch einen beliebigen Punkt P der Ebene $X\,Y$ geht eine einzige Ordinatengerade. Ist x die Coordinate dieser Geraden, so heifst x die (rechtwinklige) *Abscisse* von P. Ist P_x (Fig. 1, S. 60) der Schnittpunkt der Ordinatengeraden mit X, d. h. die Projection von P auf X, und (y) der Abstand der Punkte P, P_x, so heifst $y = +(y)$ resp. $y = -(y)$ die *Ordinate* von P, je nachdem P dem positiven oder negativen Flügel der Abscissenaxe angehört.

P_x ist ein Punkt der geradlinigen Punktschaar X. Für das durch O, $\overset{+}{X}$ und $\overline{X}$ gegebene lineare Coordinatensystem der Punktschaar (43) ist die *Coordinate von P_x gleich der Abscisse des*

Punktes P. Ebenso liefert das Loth von P auf Y den Fusspunkt P_y; er ist ein Punkt der geradlinigen Punktschaar Y, für welche durch O, $\overset{+}{Y}$ und $\bar{Y}$ ein lineares Coordinatensystem festgelegt ist; in diesem System ist die *Coordinate von* P_y = *der Ordinate* y *von* P.

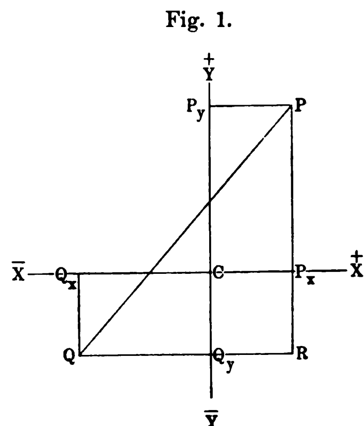
Verzichtet man also auf die Erkenntnifs der Analogie zwischen einem sphärischen und einem rechtwinkligen Coordinatensystem, so kann man viel kürzer so sagen:

Ein *ebenes rechtwinkliges Coordinatensystem* besteht aus zwei normal gelegenen Geraden X, Y, deren jede mittels des gemeinsamen Schnittpunktes C in einen positiven und negativen Strahl $\overset{+}{X}\bar{X}$, $\overset{+}{Y}\bar{Y}$ zerlegt wird. Alsdann besitzt jeder Punkt von X eine bestimmte Coordinate x für das festgelegte lineare Coordinatensystem der Punktschaar X; ebenso jeder Punkt von Y eine bestimmte Coordinate y für das lineare Coordinatensystem auf Y.

Ist P ein Punkt der Ebene XY und sind P_x und P_y seine Projectionen auf X und Y; x und y die Coordinaten von P_x und P_y, so heifst x *die X-Coordinate*, y *die Y-Coordinate von P.*

Dies läfst sich folgendermafsen auf den *Raum* ausdehnen: es seien XYZ drei normal zu einander gelegene Geraden, welche den Punkt O gemeinsam haben. Mittels O bildet man die Strahlen $\overset{+}{X}\bar{X}$, $\overset{+}{Y}\bar{Y}$, $\overset{+}{Z}\bar{Z}$. Sind $P_x P_y P_z$ die Projectionen von P auf XYZ, so heifsen die Coordinaten x, y, z dieser drei Punkte in Bezug auf die für XYZ festgelegten linearen Coordinatensysteme die X-, Y-, Z-Coordinaten von P. Dieses System heifst ein *räumliches rechtwinkliges Coordinatensystem.*

Fig. 1.



Es ist klar, dafs die rechtwinkligen Coordinaten x, y eines Punktes P der Ebene XY die Lage des letzteren eindeutig bestimmen. Denn durch x ist P_x auf X, durch y ist P_y auf Y bestimmt. Legt man durch P_x die Normale von X, durch P_y' die Normale von Y, so ist ihr Schnittpunkt derjenige Punkt, dessen Coordinaten x und y sind.

Hat ein Raumpunkt P die Coordinaten xyz, so sind dadurch zunächst die Punkte P_x, P_y, P_z gegeben; legt man durch P_x, P_y, P_z die Normalebenen von X, Y, Z, so schneiden sich diese drei Ebenen in einem Punkte, dessen Coordinaten xyz sind.

Sind (Fig. 1) für das ebene rechtwinklige Coordinatensystem XY die Punkte $P = x, y$, $Q = \xi, \eta$ durch ihre Abscissen x, ξ und ihre Ordinaten y, η gegeben, so ist auch die Länge $\overline{PQ} = r$ gegeben. Jedem der Punkte P, Q entsprechen zunächst die Fufspunkte P_x, P_y bezw. Q_x, Q_y der von P, bezw. Q, auf X und Y gefällten Lothe, und es sei R der Schnittpunkt der Geraden PP_x und QQ_y.

Dann ist

$$r^2 = \overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2.$$

Es ist aber $\overline{PR} = \overline{P_y Q_y}$, d. h. gleich dem Abstand der Punkte $P_y Q_y$, welche für das lineare Coordinatensystem Y die Coordinaten x und y haben; folglich ist (S. 54 oben):

$$\overline{P_y Q_y} = y \sim \eta = \overline{PR},$$

wenn $y \sim \eta$ den numerischen Werth von $y - \eta$ und $\eta - y$ bezeichnet. Analog wird:

$$\overline{P_x Q_x} = x \sim \xi = \overline{QR}.$$

Also ist:

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2.$$

Diese Betrachtung läfst sich auf die Bestimmung des Abstandes zweier Raumpunkte $P = x, y, z$ und $Q = \xi, \eta, \zeta$ für das räumliche System X, Y, Z übertragen, indem man durch P und Q die drei Ebenen legt, welche den Ebenen XY, YZ, ZX parallel sind. Man erhält alsdann:

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \\ &= (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2. \end{aligned}$$

50. Aus dem Voranstehenden folgt, dafs „*Coordinaten*“ für uns identisch sind mit „*lagebestimmenden Zahlen*“. Es hat sich gezeigt, dafs die verschiedenen Gebilde, für deren Elemente Coordinaten aufgestellt wurden, sich durch die *Anzahl der Coordinaten* unterschieden, deren jedes Element zu seiner Lagebestimmung bedurfte.

Die Elemente der Gebilde, welche als *Schaaren* bezeichnet wurden, sind durch *eine* Coordinate bestimmbar, also die Punkte derselben Geraden, die Punkte desselben Kreises, die Halbkreise

desselben Durchmessers, die in einer Ebene gelegenen Strahlen desselben Centrums, die Flügel derselben Axenkante. Deshalb heifsen Schaaren: *Gebilde einfacher Mannigfaltigkeit.*

Die *Punkte einer Ebene* stellen ein Gebilde dar, dessen Elemente nur durch *zwei Coordinaten* festgelegt werden können; dasselbe gilt für die *Punkte einer Kugel* und für die *Strahlen eines Büschels.* Deshalb bezeichnet man sie sämmtlich als *Gebilde zweifacher Mannigfaltigkeit.*

Die *Punkte des Raumes* stellen ein Gebilde dar, dessen Elemente *drei Coordinaten* zur Lagebestimmung erfordern. Deshalb heifst der Raum ein *Gebilde dreifacher Mannigfaltigkeit.*

Die trigonometrischen Functionen.

51. Die trigonometrischen Functionen liefern das wichtigste mathematische Rüstzeug für die sphärische Astronomie und deren Anwendung auf die astronomisch-geographische Ortsbestimmung.

Jede analytische Function bezeichnet eine gesetzmäfsige Abhängigkeit, in welcher eine Zahl y von einer anderen Zahl x, oder von mehreren anderen Zahlen steht. Die *abhängige Zahl* y wird als *Function* der als *unabhängig betrachteten Zahl* x bezeichnet, und letztere führt den Namen: *Argument der Function.*

Die durchsichtigste Form der gesetzmäfsigen Abhängigkeit entsteht, wenn y dargestellt wird durch einen analytischen Ausdruck (Nr. 28), in welchem aufser beliebigen, aber unveränderlich gedachten Zahlen, das veränderlich gedachte Argument x auftritt.

Auch die trigonometrischen Functionen sind analytisch darstellbar, und zwar in Form von Summen, welche aus unendlich vielen Summanden bestehen und eine sogenannte convergente Reihe bilden. Erfunden und definirt sind sie aber ursprünglich durch Vermittelung der Geometrie. Die geometrische Darstellung soll auch für uns mafsgebend sein. Unter gleichzeitiger Verwerthung eines *rechtwinkligen ebenen Coordinatensystems* (Nr. 49) und *eines Coordinatensystems für die cyklische Punktschaar* (Nr. 44) gestaltet sich die Definition der trigonometrischen Functionen *Sinus* und *Cosinus* äufserst einfach.

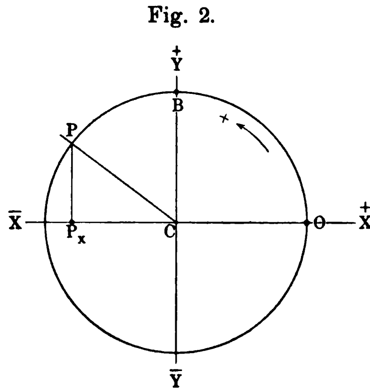
Wir gehen aus (Fig. 2) von einem rechtwinkligen Coordinatensystem XY mit Ursprung C, und einem Kreise k, welcher um C gelegt ist und die *Streckeneinheit des Systems* XY *zum Radius* hat.

Für die cyklische Punktschaar k setzen wir wiederum mittels des rechtwinkligen Systems ein cyklisches Coordinatensystem fest: sein *Ursprung* O soll der auf $\overset{+}{X}$ gelegene Punkt der cyklischen Punktschaar sein. Ist B der Schnittpunkt des Kreises mit $\overset{+}{Y}$, und bewegt man sich von O durch den *Quadranten* $\widehat{OB}$, so soll durch diese Bewegung der *positive Kreissinn* bestimmt werden. Die Einheit für die Bogen von k soll die *Einheit des Bogenmafses* sein. Da der Radius gleich der Streckeneinheit ist, so ist die Länge der Bogeneinheit gleich der Länge der Streckeneinheit; also ist der Werth eines Bogens von k im Bogenmafs gleich seiner Länge.

Durch unsere Festsetzungen ist der *Kreis k und das cyklische Coordinatensystem seiner Punktschaar dem gegebenen rechtwinkligen System XY eindeutig zugeordnet.*

Betrachten wir von jetzt an *nur solche Punkte P der Ebene XY*, welche *gleichzeitig auf dem Kreise* k liegen, so besitzt P *als Punkt der Ebene* die Abscisse x und die Ordinate y; dagegen *als Punkt der cyklischen Punktschaar* k eine *positive cyklische Coordinate* $+(\alpha)$ und *eine negative* $+(\alpha) - 2\pi = -(\beta)$.

Fig. 2.



Wir definiren nun den *Sinus* der Zahl $+(\alpha)$ und der Zahl $-(\beta)$ als die *Ordinate von P*, und den *Cosinus* von $+(\alpha)$ und $-(\beta)$ als die *Abscisse von P*. Aendert P seine Lage auf dem Kreise, so ändern sich die Werthe von (α), x, y.

Sinus und Cosinus sind also veränderlich mit α (und $-\beta$); deshalb heifst sowohl Sinus wie Cosinus eine *Function von* α, und α das *Argument* für jede dieser Functionen.

Vorläufig sind Sinus und Cosinus nur für solche positiven und negativen Zahlen definirt, deren numerischer Betrag zwischen 0 und 2π liegt. Denn zwischen diesen Grenzen liegen die numerischen Beträge aller positiven und negativen cyklischen Coordinaten. Ist α eine positive Zahl $< 2\pi$, so findet man *sin* α und

cos α, indem man den Punkt P des Kreises k sucht, welcher vom Ursprung O den *positiven* cyklischen Abstand α hat. Projicirt man P auf X und nennt seine Projection P_x, so ist jederzeit Länge $\overline{PP_x}$ der numerische Werth der Ordinate y, und Länge $\overline{OP_x}$ der numerische Werth der Abscisse x von P. Liegt P mit $\overset{+}{Y}$ auf derselben Seite von X, so ist y *positiv*; liegt P auf derselben Seite mit $\overline{Y}$, so ist y *negativ*; liegt P_x auf $\overset{+}{X}$, so ist x *positiv*; liegt P_x auf $\overline{X}$, so ist x *negativ*.

Auf diese Weise sind Ordinate und Abscisse von P bestimmt, also auch *sin* α und *cos* α.

Ist die negative Zahl $-\beta$ gegeben, und liegt β zwischen 0 und 2π, so sucht man den Punkt Q des Kreises k, welcher von O den negativen cyklischen Abstand β hat, bestimmt wie vorher seine Ordinate und Abscisse und erhält *sin* $(-\beta)$ und *cos* $(-\beta)$.

52. Offenbar ist α die Länge eines in O beginnenden Kreisweges, welcher, im positiven Kreissinne ausgeführt, zum Punkte P führt. Bezeichnen wir ihn als *positiven Kreisweg* $+\alpha$. Ebenso ist β die Länge eines in O beginnenden *Kreisweges*, welcher, im *negativen Kreissinne* ausgeführt, zum Punkte Q führt. Bezeichnen wir ihn als *negativen Kreisweg* $-\beta$. Mittels dieser Auffassung läſst sich die Definition von *sin* $(+a)$, *sin* $(-b)$, *cos* $(+a)$, *cos* $(-b)$ auf alle Zahlen a, b ausdehnen, welche $> 2\pi$ sind.

Denn man kann, von O aus, auf dem Kreise einen Weg jeder beliebigen Länge im positiven oder negativen Sinne beschreiben und wird dadurch stets zu einem bestimmten Punkte P oder Q des Kreises geführt. Der Zahl $+a$ soll der positive Kreisweg der Länge a, und der Zahl $-b$ der negative Kreisweg der Länge b zugeordnet sein. Sind P und Q die Endpunkte der beiden Wege, so soll *sin* $(+a)$ die Ordinate von P, *cos* $(+a)$ die Abscisse von P, *sin* $(-b)$ die Ordinate von Q, *cos* $(-b)$ die Abscisse von Q bedeuten.

Alle positiven Kreiswege, welche zu demselben Punkte P führen, unterscheiden sich von der Bogenlänge $\overset{\frown}{OP} = \alpha$ um eine ganze Anzahl von Kreisumfängen. Da 2π die Länge des Kreisumfanges ist, so führt $+a$ zu dem Punkte P, wenn a in der Form $\alpha + n \,.\, 2\pi$ darstellbar ist, *wo* n eine ganze Zahl bedeutet. Führt der Weg $-b$ zum Punkte Q, und ist $-\beta$ die negative

cyklische Coordinate von Q, so ist b in der Form $\beta + m.2\pi$ darstellbar, wo m eine bestimmte ganze Zahl ist.

Es ist also:

$$\begin{aligned} sin\,(\alpha + n.2\pi) &= sin\,\alpha \\ sin\,(-\beta - m.2\pi) &= sin\,(-\beta) \\ cos\,(\alpha + n.2\pi) &= cos\,\alpha \\ cos\,(-\beta - m.2\pi) &= cos\,(-\beta). \end{aligned}$$

Führen α und $-\beta$ zu *demselben* Punkte, so ist gleichzeitig $sin\,\alpha = sin\,(-\beta)$ und $-\beta = \alpha - 2\pi$; also ist:

$$sin\,\alpha = sin\,(-\beta) = sin\,(\alpha - 2\pi - m.2\pi) = sin\,(\alpha + n.2\pi)$$

oder:

$$sin\,\alpha = sin\,(\alpha \pm l.2\pi) \text{ für alle ganzen Zahlen } l,$$

ebenso:

$$cos\,\alpha = cos\,(\alpha \pm l.2\pi) \text{ für alle ganzen Zahlen } l.$$

Es ist aber auch $\alpha = -\beta + 2\pi$, also:

$$sin\,(-\beta) = sin\,(-\beta + 2\pi + n.2\pi) = sin\,(-\beta - m.2\pi);$$

also ist:

$$sin\,(-\beta) = sin\,(-\beta \pm l.2\pi) \text{ für alle ganzen Zahlen } l,$$

ebenso:

$$cos\,(-\beta) = cos\,(-\beta \pm l.2\pi) \text{ für alle ganzen Zahlen } l.$$

Aus dem Dreieck CPP_x (Fig. 2, S. 63), wo $\overline{CP} = 1$, $\overline{PP_x} = (y)$, $\overline{CP_x} = (x)$, folgt $1 = (x)^2 + (y)^2$, also auch $1 = x^2 + y^2$, folglich:

$$sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$$

für jeden Werth von α.

Da eine Summe zweier positiver Zahlen nur dann gleich 1 ist, wenn entweder die beiden Summanden echte Brüche sind, oder einer $= 0$ und der andere $= 1$, so folgt: der Sinus und Cosinus jeder Zahl ist numerisch ein echter Bruch; nur wenn eine dieser Functionen gleich 0 ist, so wird die andere numerisch gleich 1. Letzteres tritt ein für die vier Schnittpunkte des Kreises mit den Axen X, Y. Hier haben wir:

$$sin\,0 = 0,\; sin\,\frac{\pi}{2} = 1,\; sin\,\pi = 0,\quad sin\,\frac{3\pi}{2} = -1$$

$$cos\,0 = 1,\; cos\,\frac{\pi}{2} = 0,\; cos\,\pi = -1,\; cos\,\frac{3\pi}{2} = 0.$$

Die Ebene - Quadranten $\overset{+}{X}\,\overset{+}{Y}$, $\overset{+}{Y}\,\bar{X}$, $\bar{X}\,\bar{Y}$, $\bar{Y}\,\overset{+}{X}$ sollen als 1., 2., 3., 4. Quadrant bezeichnet werden; ebenso die darin enthaltenen Quadranten unseres Kreises. Die Kreispunkte unterscheiden sich dem entsprechend als Punkte des 1., 2., 3., 4. Quadranten; ihre *positiven* cyklischen Coordinaten sollen gleichfalls als Zahlen des 1., 2., 3., 4. Quadranten unterschieden werden. Dann gilt für die Vorzeichen von x, y, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, je nachdem P ein Punkt und α eine Zahl des 1., 2., 3., 4. Quadranten ist, das folgende Tableau:

Quadrant	$y = \sin\alpha$	$x = \cos\alpha$
I	+	+
II	+	−
III	−	−
IV	−	+

53. Unter dem *Sinus und Cosinus eines Bogens und Winkels* versteht man den Sinus und Cosinus ihres *Werthes* im *Bogenmafs.* Man kann jeden Winkel so legen, dafs sein Scheitel nach C und ein Schenkel nach $\overset{+}{X}$ fällt, und dafs der Winkel sich nach der Seite des I. Quadranten erstreckt. Alsdann liegt der zweite Schenkel im 1. Quadranten, wenn der Winkel spitz; im 2. Quadranten, wenn er stumpf; im 3. Quadranten, wenn sein conjugirter Winkel stumpf; im 4. Quadranten, wenn sein conjugirter Winkel spitz ist.

Die Fig. 3 liefert diese vier Fälle und die Schnittpunkte $P_1\, P_2\, P_3\, P_4$ der zweiten Schenkel mit unserem Kreise k vom Radius 1. Die Projectionen dieser Punkte auf die X-Axe seien $P_{1,x}\, P_{2,x}\, P_{3,x}\, P_{4,x}$; in der Zeichnung ist nur $P_{3,x}$ angegeben. Auf jedem der vier zweiten Schenkel sei beliebig ein Punkt S_1, S_2, S_3, S_4 angenommen (in der Zeichnung liegen sie im gleichen Abstande von C); die Projectionen auf die X-Axe seien $S_{1,x}$, $S_{2,x}$, $S_{3,x}$, $S_{4,x}$; in der Zeichnung ist nur $S_{3,x}$ angegeben.

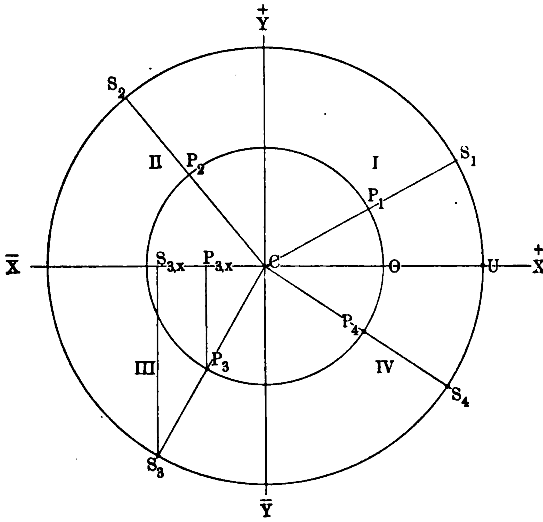
Wir wollen die vier Winkel nach der Lage des zweiten Schenkels als *Winkel des 1., 2., 3., 4. Quadranten* bezeichnen und ihre Werthe im *Bogenmafs* mit α_1, α_2, α_3, α_4.

Für jeden Quadranten erhalten wir zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke, z. B. für den 3. Quadranten die Dreiecke:

$$C P_3 P_{3,x} \text{ und } C S_3 S_{3,x}.$$

In ersterem ist $\overline{CP_3} = 1$, $\overline{P_3 P_{3,x}} = (y_3)$, d. h. der numerische Werth der Ordinate $y_3 = sin\ \alpha_3$; $\overline{CP_{3,x}} = (x)$, d. h. der numerische Werth der Abscisse $x_3 = cos\ \alpha_3$.

Fig. 3.



Aus den beiden ähnlichen Dreiecken folgt:

$$\frac{\overline{P_{3,x} P_3}}{\overline{CP_3}} = \frac{\overline{S_{3,x} S_3}}{\overline{CS_3}} = \frac{(y_3)}{1} = (y_3) = (sin\ \alpha_3)$$

$$\frac{\overline{CP_{3,x}}}{\overline{CP_3}} = \frac{\overline{CS_{3,x}}}{\overline{CS_3}} = \frac{(x_3)}{1} = (x_3) = (cos\ \alpha_3).$$

Die analoge Betrachtung für die übrigen Quadranten liefert ein analoges Resultat und wir haben den Satz:

Fällt man von einem beliebigen Punkte S eines Winkelschenkels ein Loth auf die Gerade des anderen Schenkels; ist S_0 sein Fufspunkt und C der Scheitel des Winkels, so ist die Zahl

$\frac{\overline{SS_0}}{\overline{CS}}$ *= dem absolut genommenen Sinus des Winkels, die Zahl*

$\frac{\overline{CS_0}}{\overline{CS}}$ *= dem absolut genommenen Cosinus des Winkels.*

Je nachdem das Bogenmafs des Winkels eine Zahl des 1., 2., 3., 4. Quadranten ist, setzt man vor diese absoluten Zahlen die Zeichen, welche das Tableau auf S. 66 liefert.

Für Sinus und Cosinus eines *Bogens* erhält man dieselbe Construction mittels des zugeordneten Centriwinkels.

Wichtig ist, festzuhalten, dafs für einen *spitzen* Winkel sowohl Sinus wie Cosinus *positiv* sind; für einen *stumpfen* Winkel ist der Sinus *positiv*, *dagegen ist der Cosinus negativ.*

54. Aufser dem Sinus und Cosinus gibt es noch vier andere Functionen, welche zu der Klasse der trigonometrischen Functionen gehören. Dieselben heifsen *Tangens*, *Cotangens*, *Secans*, *Cosecans* und lassen sich gleichfalls durch geometrische Vermittelung definiren — es ist das auch durch die Namen angedeutet —, aber es genügt die folgende, auf Sinus und Cosinus gestützte analytische Definition:

$$tg\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha},\quad cotg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sin\ \alpha},\quad sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha},\quad cosec\ \alpha = \frac{1}{sin\ \alpha}.$$

Bezeichnet $y = f(x)$ eine beliebige der sechs trigonometrischen Functionen, so ist stets $f(x + 2\pi) = f(x)$ für *jeden* Werth von x; aus diesem Grunde heifsen sie *periodische Functionen mit der Periode* 2π.

Alle absoluten Werthe, welche eine trigonometrische Function für die Argumente des 1. Quadranten $\left(0 \text{ bis } \frac{\pi}{2}\right)$ besitzt, kehren wieder für die Argumente jedes der anderen Quadranten, und es genügt die Kenntnifs der trigonometrischen Functionen für die Argumente zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, um daraus die Functionswerthe für alle übrigen Argumente abzuleiten.

Tangens durchläuft von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ die Werthe von 0 bis unendlich.

Cotangens durchläuft von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ die Werthe von unendlich bis 0.

Secans durchläuft von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ die Werthe von 1 bis unendlich.

Cosecans durchläuft von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ die Werthe von unendlich bis 1.

(S. Nr. 60, Ende.)

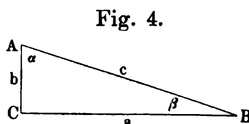
Rechtwinkliges Dreieck und Gleichungen zwischen den Seiten und den trigonometrischen Functionen der Winkel.

55. Ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC gegeben, mit dem rechten Winkel bei C, und bedeuten a und b die Längen der Katheten, α und β die ihnen gegenüberliegenden Winkel, so folgt aus dem Vorangehenden (Nr. 53):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

Fig. 4.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}; \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}; \qquad \operatorname{cotg}\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b}; \qquad \sec\beta = \frac{1}{\cos\beta} = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{c}{a}; \qquad \operatorname{cosec}\beta = \frac{1}{\sin\beta} = \frac{c}{b}.$$

Sind die Winkel α und β nicht im Bogenmaſs, sondern im Gradmaſs gegeben, durch α^0 und β^0, so ist (Nr. 40, Ende; 53, Anfang):

$$\sin(\alpha^0) = \sin\alpha = \sin\left(\frac{\alpha^0\,\pi}{180}\right) \text{ u. s. w.}$$

Trigonometrische Beziehungen zwischen den rechtwinkligen und den Polar-Coordinaten der Punkte einer Ebene.

56. Das Coordinatensystem der Strahlenschaar C (Nr. 44) in der Ebene XY habe den Strahl $\overset{+}{X}$ als Ursprung; bei *positiver* Drehung von $\overset{+}{X}$ nach $\overset{+}{Y}$ soll der 1. Quadrant $\overset{+}{X}\overset{+}{Y}$ beschrieben werden. Ist $S = \xi, \eta$ (Fig. 5, S. 70) ein beliebiger Punkt, hat der Strahl CS den positiven Abstand α von $\overset{+}{X}$ und ist $\overline{CS} = r$ die Länge des Radius vector von S, so sind r, α die Polarcoordinaten von S (Nr. 48). Schneidet CS den Kreis k in $P = x, y$, so ist:

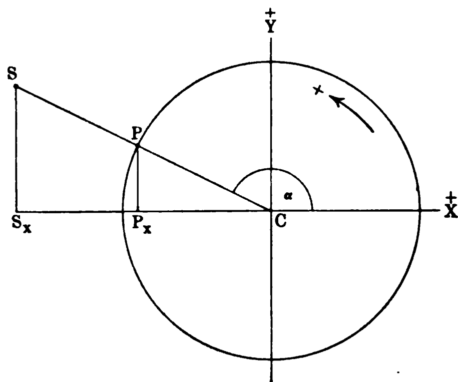
$$\xi = rx; \quad \eta = ry; \quad x = \cos\alpha; \quad y = \sin\alpha;$$

also

$$\xi = r\cos\alpha;\quad \eta = r\sin\alpha;$$

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2};\qquad \cos\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}};\qquad \sin\alpha = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}.$$

Fig. 5.



Beziehungen zwischen rechtwinkligen Raumcoordinaten und räumlichen Polar-Coordinaten eines Raumpunktes *P*.

57. Die *positive Abscissenaxe* (Nr. 46) des Polar-Coordinatensystems falle mit $\overset{+}{Z}$ des rechtwinkligen Systems XYZ (Nr. 49) zusammen; der *Ursprung der Ordinatenflügel* sei der Z-Flügel $\overset{+}{X}$; bei positiver Drehung soll ein drehbarer Z-Flügel einen Quadranten beschreiben, wenn er aus Lage $\overset{+}{X}$ in Lage $\overset{+}{Y}$ übergeführt wird.

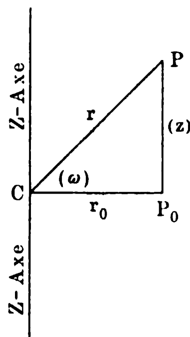
Hat der Punkt $P = x, y, z$ die *Polar-Abscisse* α, die *Polar-Ordinate* ω und den *Radius vector* r, so wird, wie sogleich gezeigt werden soll:

$$\text{I.}\begin{cases} x = r\cos\omega\cos\alpha \\ y = r\cos\omega\sin\alpha \\ z = r\sin\omega. \end{cases}$$

II. $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ (Nr. 49 für } \xi = \eta = \zeta = 0) \\ tg\,\alpha = \frac{y}{x};\ \sin\alpha \text{ stimmt im Zeichen mit } y,\ \cos\alpha \text{ mit } x, \text{ also ist der Quadrant von } \alpha \text{ bestimmt (S. 66).} \\ \sin\omega = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ \omega \text{ liegt numerisch zwischen } 0 \text{ und } \frac{\pi}{2} \text{ und hat das Zeichen von } z. \end{cases}$

I. folgt so: In Fig. 6 bedeutet PP_0 das von $P = x, y, z$ auf Ebene XY gefällte Loth. Legt man durch P sowohl die Normalebene ξ der Axe X, wie die Normalebene η der Axe Y, so ist die Strecke $\overline{PP_0}$ in der Schnittgeraden (ξ, η) enthalten. Alle Punkte von PP_0 besitzen also in Bezug auf Axe X dieselbe Normalebene ξ, also auch dieselbe X-Coordinate x, und in Bezug auf Axe Y dieselbe Normalebene η, also auch dieselbe Y-Coordinate y.

Fig. 6.



Es hat daher der Punkt $P_0 = x_0, y_0$ der Ebene XY dasselbe x und y, wie der Punkt $P = x, y, z$. Wählt man für die der Flügelschaar Z zugeordnete Strahlenschaar der Ebene XY das zugeordnete Coordinatensystem (Nr. 44), so wird:

$$x = x_0 = r_0 \cos \alpha; \quad y = y_0 = r_0 \sin \alpha \text{ (Nr. 56).}$$

Dreieck CPP_0 liefert:

$$r_0 = r \cos [(\omega)] = r \cos \omega,$$

weil

$$\cos [+(\omega)] = \cos [-(\omega)];$$

also wird

$$x = r \cos \omega \cos \alpha; \quad y = r \cos \omega \sin \alpha.$$

Bezeichnet (z) den numerischen Werth der Z-Coordinate von P, so wird $\overline{PP_0} = (z) = r \sin [(\omega)]$.

z und $\sin \omega$ haben dasselbe Zeichen, also ist $z = r \sin \omega$.

Hierbei ist die Gleichung gebraucht $\sin (-a) = -\sin a$, deren Richtigkeit sich sogleich ergeben wird.

Von der Methode, mittels welcher aus der Definition von *sin a* und *cos a* bestimmte Fundamentalgleichungen hergeleitet werden.

58. Jedem Argument von Sinus und Cosinus entspricht, da dasselbe eine cyklische Coordinate ist, ein bestimmter Punkt P auf unserem Kreise k. Eine einfache Beziehung zwischen zwei verschiedenen Argumenten a und b kann unter Umständen zwei Kreispunkte P und P' liefern, zwischen deren Ordinaten y und y' gleichfalls einfache Beziehungen stattfinden; dann mufs Analoges auch für die Abscissen x und x' stattfinden. Da nun y und y'

die Sinus von a und b sind, x und x' die Cosinus von a und b, so ist der Weg angegeben, welcher zu wichtigen Fundamentalformeln führt.

1. Gegeben seien die cyklischen Coordinaten a und $-a$; ihnen sollen auf dem Kreise die Punkte P und Q entsprechen. Da ihre Abstände vom Ursprung O, welcher auf $\overset{+}{X}$ liegt, gleich und entgegengesetzt sind, so liegen P und Q symmetrisch zu X, d. h. Strecke $\overline{PQ}$ liegt *normal* zu X und wird durch X halbirt. Ist $P = x, y$, $Q = \xi, \eta$, so mufs also sein: $\xi = x$, $\eta = -y$; d. h.:

$$\cos(-a) = \cos a; \quad \sin(-a) = -\sin a.$$

2. Gegeben seien Punkt $P = x, y$ durch die cyklische Coordinate a, Punkt $P' = x', y'$ durch die cyklische Coordinate $a + \pi$; alsdann hat Punkt $a + \pi$ von dem Punkte a den positiven cyklischen Abstand eines Halbkreises (Nr. 45); P und P' sind also *Gegenpunkte* des Kreises. Da die Strecke PP' durch C halbirt wird, d. h. durch den Anfang des rechtwinkligen Coordinatensystems XY, so ist:

$$x' = -x; \quad y' = -y.$$

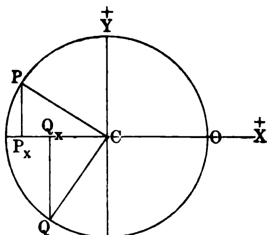
d. h.

$$\cos(a + \pi) = -\cos a; \quad \sin(a + \pi) = -\sin a.$$

Da $a + \pi$ und $a - \pi$ denselben Kreispunkt liefern (Nr. 45), so ist auch:

$$\cos(a - \pi) = \cos(a + \pi) = -\cos a;$$
$$\sin(a - \pi) = \sin(a + \pi) = -\sin a.$$
$$\cos(\pi - a) = -\cos a; \quad \sin(\pi - a) = \sin a.$$

Fig. 7.



3. Gegeben seien Punkt $P = x, y$ durch die cyklische Coordinate a und Punkt $Q = \xi, \eta$ durch die cyklische Coordinate $a + \frac{\pi}{2}$.

Es folgt geometrisch (Fig. 7) aus der Congruenz der Dreiecke CP_xP und CQ_xQ:

$$\overline{PP_x} = (y) = \overline{CQ_x} = (\xi);$$
$$\overline{CP_x} = (x) = \overline{QQ_x} = (\eta),$$

wo (y) u. s. w. den numerischen Werth von y u. s. w. bezeichnet.

Nun haben, gleichgiltig welchem Quadranten P angehört, die Sinus des Quadranten von P das *entgegengesetzte* Zeichen der

Cosinus des Quadranten von Q; dagegen haben die Cosinus des Quadranten von P *dasselbe* Zeichen wie die Sinus des Quadranten von Q; folglich ist:

$$y = \sin a = -\xi = -\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$x = \cos a = \eta = \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right);$$

also wird:

$$\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a,$$

$$\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a.$$

4. Die Kreispunkte $a + \frac{\pi}{2}$ und $a - \frac{\pi}{2}$ sind *Gegenpunkte* (Nr. 45), folglich ist:

$$\sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos a;$$

$$\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \sin a;$$

also:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a.$$

5. Die Kreispunkte $a + \frac{\pi}{2}$ und $a + \frac{3\pi}{2}$ sind *Gegenpunkte*; folglich ist:

$$\sin\left(a + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos a; \qquad \cos\left(a + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin a.$$

Ebenso sind $a - \frac{\pi}{2}$ und $a - \frac{3\pi}{2}$ *Gegenpunkte*, folglich ist:

$$\sin\left(a - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos a; \qquad \cos\left(a - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin a,$$

und

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = -\cos a; \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = -\sin a.$$

6. Die cyklischen Coordinaten a, $a + 2\pi$, $a - 2\pi$ liefern *denselben* Punkt (Nr. 52), folglich ist:

$$\sin(a + 2\pi) = \sin a = \sin(a - 2\pi);$$
$$\cos(a + 2\pi) = \cos a = \cos(a - 2\pi)$$

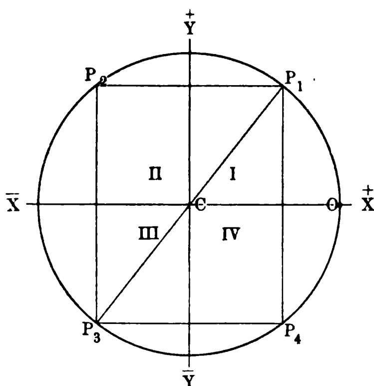
und

$$\sin(2\pi - a) = -\sin a; \qquad \cos(2\pi - a) = \cos a.$$

59. Zusammenstellung der erhaltenen Resultate:

$\sin(-a) = -\sin a$	$\cos(-a) = \cos a$
$\sin(a \pm \pi) = -\sin a$	$\cos(a \pm \pi) = -\cos a$
$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$
$\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a$	$\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a$
$\sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos a$	$\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \sin a$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
$\sin\left(a + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos a$	$\cos\left(a + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin a$
$\sin\left(a - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos a$	$\cos\left(a - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin a$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = -\sin a$
$\sin(a \pm 2\pi) = \sin a$	$\cos(a \pm 2\pi) = \cos a$
$\sin(2\pi - a) = -\sin a$	$\cos(2\pi - a) = \cos a.$

Fig. 8.



60. Wir wollen Punkte des 1., 2., 3., 4. Quadranten mit bezw. P_1, P_2, P_3, P_4 bezeichnen und ihre positiven cyklischen Coordinaten mit bezw. α_1, α_2. α_3, α_4.

Jeder Punkt P_2, bezw. P_3, P_4 bestimmt ein Rechteck, von welchem P_2, bezw. P_3, P_4 eine Ecke ist, und dessen Mittellinien in X und Y liegen. Jede der vier Ecken liegt auf einem anderen Quadranten des Kreises; und die auf dem 1. Quadranten gelegene Ecke soll mit P_1 bezeichnet werden. Es ist also dadurch jedem Punkte des 2., 3., 4. Quadranten eindeutig ein Punkt P_1 mit der cyklischen Coordinate α_1 zugeordnet.

Für *Punkt* P_2 des 2. Quadranten ist (Fig. 8):

$$\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1; \quad \cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1; \quad \alpha_1 = \pi - \alpha_2;$$

also:

$$\sin\alpha_2 = \sin(\pi - \alpha_2);\quad \cos\alpha_2 = -\cos(\pi - \alpha_2);$$

folglich:

$$tg\,\alpha_2 = -tg(\pi - \alpha_2);\quad cotg\,\alpha_2 = -cotg(\pi - \alpha_2).$$

Für *Punkt* P_3 des 3. Quadranten ist:

$$\sin\alpha_3 = -\sin\alpha_1;\quad \cos\alpha_3 = -\cos\alpha_1;\quad \alpha_1 = \alpha_3 - \pi;$$

also:

$$\sin\alpha_3 = -\sin(\alpha_3 - \pi);\quad \cos\alpha_3 = -\cos(\alpha_3 - \pi);$$

folglich:

$$tg\,\alpha_3 = tg(\alpha_3 - \pi);\quad cotg\,\alpha_3 = cotg(\alpha_3 - \pi).$$

Für *Punkt* P_4 des 4. Quadranten ist:

$$\sin\alpha_4 = -\sin\alpha_1;\quad \cos\alpha_4 = \cos\alpha_1;\quad \alpha_1 = 2\pi - \alpha_4;$$

also:

$$\sin\alpha_4 = -\sin(2\pi - \alpha_4);\quad \cos\alpha_4 = \cos(2\pi - \alpha_4);$$

folglich:

$$tg\,\alpha_4 = -tg(2\pi - \alpha_4);\quad cotg\,\alpha_4 = -cotg(2\pi - \alpha_4).$$

Es ist also gezeigt, dafs *jede trigonometrische Function von Winkeln des 2., 3., 4. Quadranten ausgedrückt werden kann durch die gleichartige Function eines Winkels des 1. Quadranten.*

Innerhalb *desselben* Quadranten bleibt das *Zeichen* jeder Function *unverändert*, während der *absolute Betrag entweder stetig wächst oder stetig abnimmt.*

Hierüber gibt das nachstehende Tableau Auskunft. Es ist darin folgende Bezeichnung angewandt: erhält eine Function $y = f(x)$ für den Werth $x = a$ den Werth $y = 0$, und ist ω eine sehr kleine positive Zahl, so setzen wir $f(a) = \mp 0$, wenn $f(a - \omega)$ das Zeichen $-$, und $f(a + \omega)$ das Zeichen $+$ hat; im umgekehrten Falle setzen wir $f(a) = \pm 0$.

Behält ω dieselbe Bedeutung und können für $x = b - \omega$ und für $x = b + \omega$ die numerischen Werthe von $f(b - \omega)$ und $f(b + \omega)$ gröfser gemacht werden, als jede gegebene noch so grofse Zahl, sobald ω klein genug wird, so setzen wir: $f(b) = \mp\infty$ ($\mp$ *unendlich*), wenn $f(b - \omega)$ das Zeichen $-$, und $f(b + \omega)$ das Zeichen $+$ hat; im umgekehrten Falle setzen wir $f(b) = \pm\infty$.

Dann sind die Werthe der sechs trigonometrischen Functionen für $x = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$:

Argument / Function	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
Sinus	$+0$	$+1$	± 0	-1	$+0$
Cosinus	$+1$	± 0	-1	∓ 0	$+1$
Tangens . . .	∓ 0	$\pm \infty$	$+0$	$\pm \infty$	$+0$
Cotangens . .	$\mp \infty$	± 0	$\mp \infty$	$+0$	$+\infty$
Secans	$+1$	$\pm \infty$	-1	$\mp \infty$	$+1$
Cosecans . . .	$\mp \infty$	$+1$	$\pm \infty$	-1	$+\infty$

Bestimmung eines Winkels aus einer trigonometrischen Function desselben.

61. Die Fig. 8 (S. 74) lehrt, dafs für die vier Winkel α_1, $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, $\alpha_3 = \pi + \alpha_1$, $\alpha_4 = 2\pi - \alpha_1$ alle vier Sinus numerisch gleich sind, ebenso alle vier Cosinus unter einander, die vier Tangenten und die vier Cotangenten.

Ist also ein *Sinus* gegeben und ist (y) sein numerischer Werth, so entsprechen diesem Werthe vier Winkel, von welchen einer dem 1. Quadranten angehört und mit α_1 bezeichnet werde. Dieses α_1, für welches $\sin \alpha_1 = (y)$, ist stets durch berechnete Tafeln zu ermitteln. Ist nun der Sinus $= +(y)$, so sind α_1 und $\pi - \alpha_1$ seine Argumente; ist der Sinus $= -(y)$, so sind $\pi + \alpha_1$ und $2\pi - \alpha_1$ seine Argumente.

Ist (x) der numerische Werth eines gegebenen *Cosinus*, so kann aus den Tafeln das Argument α_1 entnommen werden, für welches $\cos \alpha_1 = (x)$. Ist nun der Cosinus $= +(x)$, so sind α_1 und $2\pi - \alpha_1$ seine Argumente; ist der Cosinus $= -(x)$, so sind $\pi - \alpha_1$ und $\pi + \alpha_1$ seine Argumente.

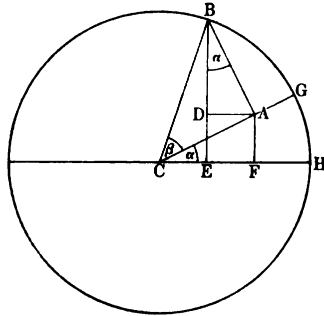
Ist (t) der numerische Werth einer gegebenen *Tangente*, so kann aus den Tafeln das Argument α_1 entnommen werden, für welches $tg\, \alpha_1 = (t)$. Ist nun die Tangente $= +(t)$, so sind α_1 und $\pi + \alpha_1$ ihre Argumente; ist die Tangente $= -(t)$, so sind $\pi - \alpha_1$ und $2\pi - \alpha_1$ ihre Argumente.

Ist (c) der numerische Werth einer gegebenen *Cotangente*, so liefern auch hier die Tafeln das Argument α_1, für welches $cotg\, \alpha_1 = (c)$. Ist die Cotangente $= +(c)$, so sind α_1 und $\pi + \alpha_1$ ihre Argumente; ist die Cotangente $= -(c)$, so sind $\pi - \alpha_1$ und $2\pi - \alpha_1$ ihre Argumente.

Von den Beziehungen zwischen Sinus und Cosinus der Argumente $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, α und β.

62. Es wird (Fig. 9) zunächst angenommen, dafs α und β positiv, und $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Dann ist die nebenstehende Zeichnung möglich, in welcher zwei Winkel vom Werthe α und β (im Bogenmafs) den Scheitel C und den Schenkel CG gemeinsam haben. Auf einem der beiden äufseren Schenkel, z. B. dem von $\angle \beta$, werde die *Streckeneinheit* $\overline{CB}$ aufgetragen, von B ein Loth $\overline{BE}$ auf den äufseren Schenkel von $\angle \alpha$ und ein Loth $\overline{BA}$ auf den gemeinsamen Schenkel von α und β gefällt; endlich construire man das Rechteck $ADEF$. Dann ist $\angle DBA = \alpha$.

Fig. 9.



Man sieht aus der Figur, dafs Strecke $\overline{BA}$ eine gemeinsame Seite der rechtwinkligen Dreiecke BAC und BAD ist, und $\overline{CA}$ eine gemeinsame Seite der rechtwinkligen Dreiecke CAB und CAF. Wir können also mittels der für rechtwinklige Dreiecke geltenden Formeln (Nr. 55) die Strecken $\overline{BA}$ und $\overline{CA}$ doppelt ausdrücken. Es ergibt sich alsdann, weil $\overline{CB} = 1$ ist:

$\overline{BA} = \overline{BD} : \cos\alpha$	$\overline{BA} = \overline{DA} : \sin\alpha$
$\overline{BA} = \sin\beta$	$\overline{BA} = \sin\beta$
$\overline{BD} = \cos\alpha \sin\beta.$	$\overline{DA} = \sin\alpha \sin\beta.$
$\overline{CA} = \overline{FA} : \sin\alpha$	$\overline{CA} = \overline{CF} : \cos\alpha$
$\overline{CA} = \cos\beta$	$\overline{CA} = \cos\beta$
$\overline{FA} = \sin\alpha \cos\beta.$	$\overline{CF} = \cos\alpha \cos\beta.$

Nun ist, weil $\overline{ED} = \overline{FA}$:

$\overline{BE} = \overline{FA} + \overline{BD}$; es ist aber $\overline{BE} = \sin(\alpha + \beta)$,

folglich wird:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

Ferner ist, wegen $\overline{EF}=\overline{DA}$:

$\overline{CE}=\overline{CF}-\overline{DA}$; es ist aber $\overline{CE}=\cos(\alpha+\beta)$, folglich wird:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Die Gleichungen:

$$(A)\qquad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$(B)\qquad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

finden die weitestgehende Anwendung in der Theorie der Ortsbestimmungen. Es ist deshalb zu zeigen, dafs sie in Bezug auf das Werthgebiet von α und β an keine Beschränkung gebunden sind, dafs sie nicht blofs gelten, wenn α, β und $(\alpha+\beta)$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen, sondern für jeden positiven und negativen Werth der Zahlen α und β. Hierzu dienen die bereits abgeleiteten Gleichungen (Nr. 59):

1. $\sin\left(a\mp\frac{\pi}{2}\right)=\mp\cos a,\qquad \cos\left(a\mp\frac{\pi}{2}\right)=\pm\sin a,$
2. $\sin(a\mp\pi)=-\sin a,\qquad \cos(a\mp\pi)=-\cos a,$
3. $\sin\left(a\mp\frac{3\pi}{2}\right)=\pm\cos a,\qquad \cos\left(a\mp\frac{3\pi}{2}\right)=\mp\sin a,$
4. $\sin(a+2\pi)=\sin a,\qquad \cos(a+2\pi)=\cos a.$

Wo in einer Gleichung auf beiden Seiten $\pm$ oder $\mp$ auftritt, gelten die oberen Zeichen gleichzeitig, ebenso die unteren.

Ist β' *eine positive Zahl des 2. Quadranten*, so gibt es stets eine Zahl β zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, für welche $\beta'=\beta+\frac{\pi}{2}$, also $\beta=\beta'-\frac{\pi}{2}$ ist. Es ist demnach:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\left(\alpha+\beta'-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha\cos\left(\beta'-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\alpha\sin\left(\beta'-\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\alpha+\beta'-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha\cos\left(\beta'-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\alpha\sin\left(\beta'-\frac{\pi}{2}\right).$$

Werden die Gleichungen 1. angewandt, so gehen die letzten Gleichungen über in:

$$-\cos(\alpha+\beta')=\sin\alpha\sin\beta'-\cos\alpha\cos\beta'$$
$$\sin(\alpha+\beta')=\cos\alpha\sin\beta'+\sin\alpha\cos\beta', \text{ oder}$$

$$(A') \qquad \sin(\alpha + \beta') = \sin\alpha \cos\beta' + \cos\alpha \sin\beta'$$

$$(B') \qquad \cos(\alpha + \beta') = \cos\alpha \cos\beta' - \sin\alpha \sin\beta'.$$

Die Gleichungen A' und B' entstehen aus den Gleichungen A und B, indem β' statt β gesetzt wird.

Ist β' eine positive Zahl des dritten oder vierten Quadranten, so gibt es stets eine Zahl β zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, für welche $\beta' = \beta + \pi$ oder $\beta' = \beta + \frac{3\pi}{2}$.

Verfährt man nun analog wie vorher, unter Benutzung der Gleichungen 2. und 3., so gelangt man zu Gleichungen, welche aus (A) und (B) hervorgehen, wenn man β' für β einsetzt. (A) und (B) gelten also für alle Werthe von β zwischen 0 und 2π.

Ist $\overline{\beta'}$ eine negative Zahl des ersten Quadranten, d. h. numerisch zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so gibt es stets eine Zahl β zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, für welche $\beta = \overline{\beta'} + \frac{\pi}{2}$; setzt man diesen Werth von β ein in (A) und (B) und wendet man die Gleichungen 1. an, so erhält man wiederum Gleichungen, welche aus (A) und (B) hervorgehen, wenn man darin $\overline{\beta'}$ an Stelle von β setzt.

In analoger Weise stellt man eine *negative* Zahl $\overline{\beta'}$, numerisch des 2., 3., 4. Quadranten, dar durch $\beta - \pi$, $\beta - \frac{3\pi}{2}$, $\beta - 2\pi$, wo β zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Setzt man in (A) und (B) successive $\overline{\beta'} + \pi$, $\overline{\beta'} + \frac{3\pi}{2}$, $\overline{\beta'} + 2\pi$ an Stelle von β und wendet die Gleichungen 2., 3., 4. an, so erhält man wiederum Gleichungen, welche aus (A) und (B) hervorgehen, wenn $\overline{\beta'}$ statt β gesetzt wird.

63. Es gelten also (A) und (B) für alle $\pm$ Zahlen β, welche numerisch zwischen 0 und 2π liegen. Dieselbe Betrachtung kann auch für α angestellt werden. (A) *und* (B) *gelten also für alle Zahlen α und β zwischen 2π und -2π.*

Dann aber gelten sie auch für *alle* positiven und negativen Zahlen überhaupt, da jede derselben sich in der Form $\alpha \pm m.2\pi$, $\beta \pm n.2\pi$ darstellen läſst, und eine trigonometrische Function unverändert bleibt, wenn ihr Argument um ein ganzes Vielfaches

von 2π vermehrt oder vermindert wird. Bedeuten also $\tilde{a}$ eine beliebige $\pm$ Zahl und b eine beliebige absolute Zahl, so ist stets:

$$\sin[\tilde{a} + (\pm b)] = \sin\tilde{a}\cos(\pm b) + \cos\tilde{a}\sin(\pm b),$$
$$\cos[\tilde{a} + (\pm b)] = \cos\tilde{a}\cos(\pm b) - \sin\tilde{a}\sin(\pm b).$$

Unter Berücksichtigung von $\sin(-a) = -\sin a$, $\cos(-a) = \cos a$ folgt hieraus:

$$\sin(\tilde{a} \pm b) = \sin\tilde{a}\cos b \pm \cos\tilde{a}\sin b,$$
$$\cos(\tilde{a} \pm b) = \cos\tilde{a}\cos b \mp \sin\tilde{a}\sin b.$$

Es ist also für ein beliebiges Zahlenpaar α, β:

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

Bildet man 1. + 2., 1. — 2., 3. + 4., 3. — 4., und setzt

$\alpha + \beta = \gamma$, $\alpha - \beta = \delta$, also $\alpha = \frac{1}{2}(\gamma + \delta)$, $\beta = \frac{1}{2}(\gamma - \delta)$,

so wird:

$$\sin\gamma + \sin\delta = 2\sin\frac{1}{2}(\gamma + \delta)\cos\frac{1}{2}(\gamma - \delta),$$
$$\sin\gamma - \sin\delta = 2\cos\frac{1}{2}(\gamma + \delta)\sin\frac{1}{2}(\gamma - \delta),$$
$$\cos\gamma + \cos\delta = 2\cos\frac{1}{2}(\gamma + \delta)\cos\frac{1}{2}(\gamma - \delta),$$
$$\cos\gamma - \cos\delta = -2\sin\frac{1}{2}(\gamma + \delta)\sin\frac{1}{2}(\gamma - \delta).$$

Läfst man an Stelle der Bezeichnungen γ, δ die Bezeichnungen α, β treten, so lauten die letzten vier Gleichungen:

5. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta),$
6. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta),$
7. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta),$
8. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta).$

Auch diese Gleichungen sind von grofser Wichtigkeit.

Da $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$, so wird nach 1. und 2.:

$$9. \quad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$10. \quad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2};$$

nun ist stets $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (S. 65), also:

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

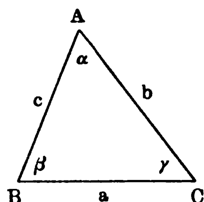
$$11. \quad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \quad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1;$$

$$12. \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}; \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Die Grundgleichungen der ebenen Trigonometrie.

64. Die drei Seitenlängen eines Dreiecks ABC seien a, b, c und ihre gegenüberliegenden Winkel α, β, γ.

Fig. 10.



Man nennt $a\,b\,c$ und $\alpha\,\beta\,\gamma$ die sechs Stücke des Dreiecks. Die drei Winkelwerthe sind an die Bedingung gebunden: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ für Bogenmafs, $= 180$ für Gradmafs.

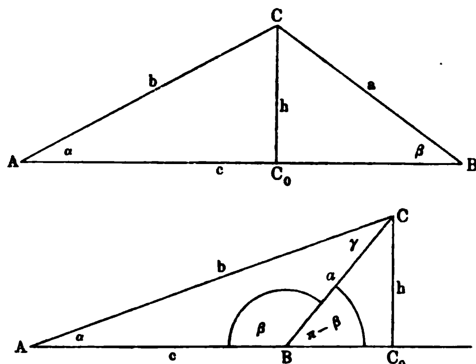
Sollen drei Strecken die Seiten eines Dreiecks sein, so mufs die Summe *je* zweier gröfser als die dritte, d. h. $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$, also die positive Differenz je zweier gröfser als die dritte sein (Satz der Elementargeometrie).

Die *Aufgabe der ebenen Trigonometrie* besteht darin, Gleichungen zwischen den drei *Seitenlängen* a, b, c und zwischen den *trigonometrischen Functionen der Winkel* α, β, γ eines Dreiecks aufzustellen, und zwar zu dem Zwecke, aus drei von einander unabhängigen der sechs Stücke die übrigen durch Rechnung zu finden.

Es können gegeben sein: a, b, γ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel); a, b, β (zwei Seiten und der der Seite b gegenüberliegende Winkel); a, β, γ (eine Seite und die beiden anliegenden Winkel); a, b, c (die drei Seiten). Die Grund-

gleichungen, mittels deren die Aufgabe gelöst wird, werden ohne Weiteres aus den bereits bekannten Gleichungen abgeleitet. Hierbei sei bemerkt, dafs wir die Aufgabe der Trigonometrie in Bezug auf das rechtwinklige Dreieck bereits in Nr. 55 gelöst haben und zum Ausgangspunkt des Folgenden machen.

Fig. 11.



Aus einem beliebigen Dreieck ABC (Doppelfigur 11) gehen stets zwei rechtwinklige Dreiecke ACC_0 und BCC_0 hervor, wenn von einer Ecke C das Loth $\overline{CC_0} = h$ auf die gegenüberliegende Seite gefällt wird. h gehört alsdann beiden Dreiecken an, und man erhält *stets* $h = b \sin \alpha$ und $h = a \sin \beta$, weil $\sin (\pi - \beta) = \sin \beta$ ist. Indem man A und B successive an die Stelle von C treten läfst, erhält man:

$$\text{I. } a \sin \beta = b \sin \alpha;\ b \sin \gamma = c \sin \beta;\ c \sin \alpha = a \sin \gamma.$$

Diese drei Gleichungen heifsen der *Sinussatz* der ebenen Trigonometrie. Dieselben lassen sich zu drei Paaren von Gleichungen combiniren. Das erste sei:

$$a \sin \beta = b \sin \alpha$$
$$a \sin \gamma = c \sin \alpha;$$

durch Addition folgt:

$$a (\sin \beta + \sin \gamma) = (b + c) \sin \alpha;$$

es ist aber nach Nr. 63, 5:

$$\sin \beta + \sin \gamma = 2 \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma)$$

und nach Nr. 63, 9:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2};$$

folglich:

$$a \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma) = (b + c) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Da nun:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

so ist:

$$\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha;$$

folglich nach Nr. 59:

$$\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right) = \cos\frac{1}{2}\alpha.$$

Deshalb wird:

$$1.\quad a\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = (b + c)\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

Aus der Subtraction des ursprünglichen Gleichungspaares folgt:

$$a(\sin\beta - \sin\gamma) = (b - c)\sin\alpha = (b - c)\,2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha,$$

nun ist nach Nr. 63, 6:

$$\sin\beta - \sin\gamma = 2\cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma),$$

ferner ist:

$$\cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right) = \sin\frac{1}{2}\alpha;$$

also wird:

$$2.\quad a\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = (b - c)\cos\frac{1}{2}\alpha.$$

Erhebt man die Gleichungen 1. und 2. in's Quadrat und addirt sie, so folgt wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\left(\cos^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\alpha\right);$$

also nach Nr. 63, 10:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Indem man mit den beiden anderen Gleichungspaaren des Sinussatzes I. analog verfährt, erhält man das Gesammtresultat:

$$\text{II.}\qquad \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen heifsen der *Cosinussatz der ebenen Trigonometrie.*

Die Gleichungen 1. und 2. lassen sich auch schreiben:

$$1a.\quad a \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = (b + c) \cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

$$2a.\quad a \sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = (b - c) \sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

Durch Division erhält man:

$$tg\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{b - c}{b + c} tg\frac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

Fügt man die aus den beiden anderen Gleichungspaaren hervorgehenden Gleichungen hinzu, so erhält man als Gesammtresultat:

$$\text{III.}\quad \begin{aligned} tg\frac{1}{2}(\beta - \gamma) : tg\frac{1}{2}(\beta + \gamma) &= b - c : b + c, \\ tg\frac{1}{2}(\gamma - \alpha) : tg\frac{1}{2}(\gamma + \alpha) &= c - a : c + a, \\ tg\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : tg\frac{1}{2}(\alpha + \beta) &= a - b : a + b. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen heifsen der *Tangentensatz der ebenen Trigonometrie.* In ihnen ist:

$$tg\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = cotg\frac{1}{2}\alpha; \quad tg\frac{1}{2}(\gamma + \alpha) = cotg\frac{1}{2}\beta;$$

$$tg\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = cotg\frac{1}{2}\gamma,$$

was für die Praxis gebraucht wird, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, z. B. a, b, γ, und wenn α, β, c gesucht werden.

65. Mittels der Sätze I., II., III. von Nr. 64 lassen sich alle Aufgaben der ebenen Trigonometrie im Princip lösen.

Sind die *drei Winkel* (aus zwei gegebenen folgt der Werth des dritten) und *eine Seite* a gegeben, so liefert der *Sinussatz* die Seiten b und c.

Sind *alle drei Seiten* gegeben, so liefert der *Cosinussatz* die Cosinus der drei Winkel, und zwar einen spitzen Winkel, wenn der Cosinus $+$ ist, einen stumpfen Winkel, wenn er $-$ ist.

Sind *zwei Seiten* a, b und der *eingeschlossene Winkel* γ, also $\frac{1}{2}\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ gegeben, so liefert der *Tangentensatz* $tg\,\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; ist diese Zahl $+$, so ist $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ein Winkel des

ersten Quadranten; ist sie negativ, so ist $tg\,\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ ein Winkel des ersten Quadranten. Aus $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ und $\alpha - \beta$, resp. $\beta - \alpha$ erhält man α und β; und danach c mittels des Sinussatzes.

Sind gegeben a, b und β, und ist $b > a$, so liefert der Sinussatz die Stücke α, γ, c. Ist $b < a$, so ist die Lösung nur möglich, wenn entweder $b > a\,sin\,\beta$ ist oder $b = a\,sin\,\beta$. Im ersteren Falle gibt es zwei Dreiecke: für das eine ist α stumpf, für das andere ist α der spitze Supplementwinkel des stumpfen; für beide hat $sin\,\alpha$ denselben Werth. Im zweiten Falle gibt es nur *ein* Dreieck mit $sin\,\alpha = 1$, d. h. $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^0$.

Für Rechnungszwecke wird der Cosinussatz umgeformt: setzt man einmal $cos\,\alpha = 1 - 2\,sin^2\,\frac{1}{2}\,\alpha$; das andere Mal $cos\,\alpha = 2\,cos^2\,\frac{1}{2}\,\alpha - 1$ (Nr. 63, 11, 12) und schreibt abgekürzt $s = \frac{1}{2}\,(a + b + c)$, so erhält man:

$$sin^2\,\frac{1}{2}\,\alpha = \frac{(s-b)\,(s-c)}{b\,c};\quad cos^2\,\frac{1}{2}\,\alpha = \frac{s\,(s-a)}{b\,c};$$

$$tg^2\,\frac{1}{2}\,\alpha = \frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)};$$

$$sin^2\,\frac{1}{2}\,\beta = \frac{(s-c)\,(s-a)}{c\,a};\quad cos^2\,\frac{1}{2}\,\beta = \frac{s\,(s-b)}{c\,a};$$

$$tg^2\,\frac{1}{2}\,\beta = \frac{(s-c)\,(s-a)}{s\,(s-b)};$$

$$sin^2\,\frac{1}{2}\,\gamma = \frac{(s-a)\,(s-b)}{a\,b};\quad cos^2\,\frac{1}{2}\,\gamma = \frac{s\,(s-c)}{a\,b};$$

$$tg^2\,\frac{1}{2}\,\gamma = \frac{(s-a)\,(s-b)}{s\,(s-c)}.$$

Von der Ellipse.

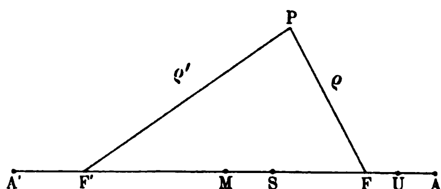
66. Die Ellipse ist eine ebene Curve, welche für die Betrachtungen der sphärischen Astronomie von besonderer Wichtigkeit ist.

Auf einer Geraden (Fig. 12) seien zwei Strecken $\overline{FF'}$ und $\overline{AA'}$ gegeben mit der *gemeinsamen* Mitte M. Die Länge $\overline{FF'}$ sei $2f$, die

Länge $\overline{AA'}$ sei $2a$, und a sei $> f$. Jeder Punkt S oder U der Strecke $\overline{AA'}$ theilt dieselbe in zwei Strecken $\overline{AS} = \varrho$ $\overline{A'S} = \varrho'$ und $\overline{AU} = \varrho_1$ $\overline{A'U} = \varrho_1'$, also ist $2a = \varrho + \varrho' > 2f$ und $2a = \varrho_1 + \varrho_1' > 2f$. In der Zeichnung ist $\varrho' > \varrho$, $\varrho_1' > \varrho_1$, weil S und U auf derselben Seite von M liegen wie F.

Da $\overline{MA} = \overline{MA'} = a$, $\overline{MF} = \overline{MF'} = f$, so ist $\overline{FA} = \overline{F'A'} = a - f$, und $\varrho' = \overline{A'S} = a + \overline{MS}$, $\varrho = a - \overline{MS}$, also $\varrho' - \varrho = 2\overline{MS}$; es ist aber $\overline{MS}$ eine *Theilstrecke* von $\overline{MF} = f$, also $< f$; folglich $\varrho' - \varrho < 2f$. Da nun $\varrho' + \varrho > 2f$, $\varrho' - \varrho < 2f$, so liefert der Punkt S, durch welchen die Längen ϱ' und ϱ bestimmt werden, ein Dreieck, dessen Basis $\overline{FF'} = 2f$ ist, und dessen Seiten die Längen ϱ' und ϱ haben.

Fig. 12.



Die Spitze dieses Dreiecks sei P. Liegt Punkt P_1 (nicht markirt) symmetrisch zu P in Bezug auf die Gerade AA', so besitzt auch das Dreieck $FF'P_1$ die Seitenlängen ϱ' und ϱ. *Jeder Punkt S der Strecke $\overline{FF'}$ bestimmt also in der Ebene einen Punkt P und einen Punkt P_1.*

Für den Punkt U auf Strecke $\overline{AF}$ ist:

$$\varrho_1' = a + f + \overline{FU};\ \varrho_1 = a - f - \overline{FU};\ \varrho_1' - \varrho_1 = 2f + 2\overline{FU};$$

also ist $\varrho_1' - \varrho_1 > 2f$; es gibt also kein Dreieck über der Basis $\overline{FF'}$, mit den Seitenlängen ϱ_1' und ϱ_1, weil die Differenz zweier Dreieckseiten kleiner sein mufs, als die dritte Seite.

Läfst man den Punkt S die Strecke $\overline{FF'}$ beschreiben, und bestimmt man für jede Lage die zugehörigen Punkte P und P_1 der Ebene, so erzeugen P und P_1 diejenige Curve, welche *Ellipse* heifst.

Für jede Strecke gibt es drei Punkte, welche eine besondere Lage haben und deshalb ausgezeichnete Punkte derselben heifsen: die beiden *Endpunkte* und die *Mitte.* Für die Strecke $\overline{FF'}$, welche der Punkt S zur Erzeugung der Punktpaare PP_1 zurücklegt, sind dies die Punkte F, F' und M.

Es läfst sich annehmen, dafs die drei von ihnen bestimmten Punktpaare auch ihrerseit unter den übrigen Punkten der Ellipse

eine besondere Rolle spielen, und es zeigt sich in der That Folgendes: liegt S im Grenzpunkt F der Strecke $\overline{FF'}$, so fallen die beiden zugeordneten Punkte P und P_1 zusammen, und zwar im Punkte A unserer Geraden FF'; liegt S in dem anderen Grenzpunkt F', so fallen die zugeordneten Punkte P und P_1 gleichfalls zusammen, und zwar im Punkte A'.

Denn liegt S in F, so ist $\varrho = a - f$; $\varrho' = a + f$; $\varrho' - \varrho = 2f$. Der Kreis um F mit Radius ϱ schneidet den Kreis um F' mit Radius ϱ' nicht länger in zwei Punkten P und P_1, sondern es findet Berührung im Punkte A statt. Es fallen also P und P_1 nach A. Ebenso folgt, dafs die, durch Lage von S in F', bestimmten Punkte P und P_1 nach A' fallen.

Fig. 13.



Befindet sich S in M (Mitte von $\overline{FF'}$), so liegt das zugeordnete Punktpaar $P\,P_1$ auf der durch M gelegten Normale von FF'. Die Dreiecke $FF'P$ und $FF'P_1$ sind alsdann gleichschenklig, die Schenkel haben die Länge a, und wenn die Punkte P und P_1 in dieser ausgezeichneten Lage mit B und B' bezeichnet werden und Länge $\overline{MB} = \overline{MB'}$ mit b, so ist $b^2 = a^2 - f^2$.

Da $a > b$, so heifst $\overline{AA'}$ die *grofse Axe*, $\overline{BB'}$ die *kleine Axe* der Ellipse, A und A', B und B' heifsen ihre *Scheitel*.

Die Dreiecke $FF'A$, $FF'A'$, welche sich ergeben, wenn S in F, bezw. in F' liegt, sind keine eigentlichen Dreiecke, sondern solche, deren Spitze A, bezw. A', in der Basislinie liegt.

Die Punkte F und F' heifsen die *Brennpunkte der Ellipse*; $\frac{1}{2}\overline{FF'} = f$ heifst die *lineare Excentricität*; $\varepsilon = \frac{f}{a}$ heifst die *(numerische) Excentricität.* Es ist also:

$$f = a\varepsilon; \quad b^2 = a^2 - f^2; \quad b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2).$$

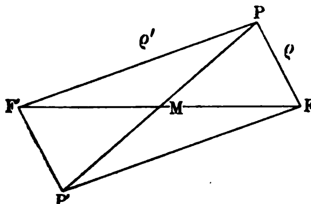
Die nach einem Ellipsenpunkt P gezogenen Strahlen $\overline{FP}$ und $\overline{F'P}$ heifsen die *Brennstrahlen von P*; sind ϱ und ϱ' ihre Werthe, so ist stets $\varrho + \varrho' = 2a$ (Definition).

Verlängert man (Fig. 14) die Strecke $\overline{MP}$ über M um sich selbst, so erhält man die Strecke $\overline{MP'} = \overline{MP}$. Da $\overline{FP'} = \varrho'$, $\overline{F'P'} = \varrho$, so ist P' gleichfalls ein Ellipsenpunkt, denn es ist $\overline{FP'} + \overline{F'P'} = 2a$. *Jede Gerade durch M wird also von der*

Ellipse in zwei Punkten geschnitten, welche gleichen Abstand von M haben. Aus diesem Grunde heifst M der *Mittelpunkt der Ellipse.*

Jedem Punkte S der Strecke $\overline{FF'}$ ordneten sich zwei Ellipsenpunkte P, P_1 zu, welche symmetrisch zu der grofsen Axe AA' liegen. Durch S wird auf der Strecke $\overline{FF'}$ ein Punkt S' bestimmt, für welchen $\overline{MS'} = \overline{MS}$ ist; d. h. S und S' liegen symmetrisch in Bezug auf die kleine Axe BB'. Es ist geometrisch ohne Weiteres einleuchtend, dafs die dem Punkte S' zugeordneten Ellipsenpunkte P', P_1' symmetrisch zu den Punkten P, P_1 in Bezug auf die kleine Axe liegen.

Fig. 14.



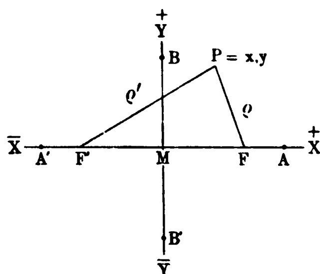
Es sind also sowohl *die grofse wie die kleine Axe Symmetrieaxen der Ellipse.*

Jedem Ellipsenpunkte P sind daher drei andere Ellipsenpunkte zugeordnet, welche symmetrisch liegen zu P in Bezug auf den Mittelpunkt, auf die grofse und die kleine Axe. Dieselben bilden mit P die Ecken eines Rechtecks, dessen Diagonalen durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen und dessen Mittellinien in die grofse und in die kleine Axe fallen.

Gleichung der Ellipse.

67. Die grofse und die kleine Axe der Ellipse bestimmen ein rechtwinkliges Coordinatensystem XY, dessen Anfang im Mittelpunkte M der Ellipse liegt, dessen positiver X-Strahl $\overset{+}{X}$ mit Strahl MA, dessen positiver Y-Strahl $\overset{+}{Y}$ mit Strahl MB zusammenfällt. Es ist $\overline{MF} = \overline{MF'} = f$; $\overline{MA} = \overline{MA'} = a$; $\overline{MB} = \overline{MB'} = b$.

Fig. 15.



Für dieses System habe ein beliebiger Ellipsenpunkt die rechtwinkligen Coordinaten x, y und die Brennstrahlenlängen $\overline{FP} = \varrho$, $\overline{F'P} = \varrho'$.

Wir wissen aus Nr. 49, dafs, wenn zwei Punkte der Ebene durch die Coordinaten x, y und ξ, η gegeben sind, alsdann $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$ und auch $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$ das Quadrat ihres Abstandes ist.

Der Brennpunkt F hat die Coordinaten $\xi = f$, $\eta = 0$, der Brennpunkt F' hat die Coordinaten $\xi' = -f$, $\eta' = 0$, es ist also:

$$\varrho^2 = (x - {}^2 f) + y^2; \quad \varrho'^2 = (x + f)^2 + y^2,$$

folglich:

$$\varrho'^2 - \varrho^2 = 4 f x = 4 a \varepsilon x \text{ (weil } f = a \varepsilon).$$

Nun ist:

$(\varrho' - \varrho)(\varrho' + \varrho) = \varrho'^2 - \varrho^2$ und $\varrho' + \varrho = 2a$ (Summe der Brennstrahlen),

also:

$$(\varrho' - \varrho)\, 2a = 4 a \varepsilon x, \text{ d. h. } \varrho' - \varrho = 2 \varepsilon x,$$

folglich:

$$1. \quad \varrho = a - \varepsilon x; \quad \varrho' = a + \varepsilon x.$$

Es sind also die beiden Brennstrahlen des Ellipsenpunktes P durch die Abscisse x von P, durch den Werth der großen Halbaxe a und durch die numerische Excentricität ε ausgedrückt.

Aus

$$\varrho' = a + \varepsilon x$$

folgt

$$\varrho'^2 = a^2 + 2 a \varepsilon x + \varepsilon^2 x^2;$$

es ist aber auch (s. oben):

$$\varrho'^2 = (x + f)^2 + y^2 = x^2 + 2 x f + f^2 + y^2$$
$$= x^2 + 2 a \varepsilon x + a^2 \varepsilon^2 + y^2;$$

folglich ist:

$$a^2 + 2 a \varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 = x^2 + 2 a \varepsilon x + a^2 \varepsilon^2 + y^2,$$

d. h.

$$a^2 + \varepsilon^2 x^2 = x^2 + a^2 \varepsilon^2 + y^2,$$

oder

$$a^2 (1 - \varepsilon^2) = x^2 (1 - \varepsilon^2) + y^2,$$

oder

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 (1 - \varepsilon^2)},$$

da $a^2 (1 - \varepsilon^2) = b^2$, so folgt:

$$2. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung heißt die *Gleichung unserer Ellipse* in Bezug auf das gegebene Coordinatensystem. Sie gilt für *jeden* Punkt der Ellipse, da $P = x, y$ jeden beliebigen Ellipsenpunkt bedeuten durfte. Ist also x', y' ein anderer Ellipsenpunkt, und setzt man in 2. x' statt x, y' statt y, so liefert der Ausdruck

$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}$ gleichfalls die Zahl 1. Man sagt deshalb: die *Coordinaten x' y' befriedigen die für x und y aufgestellte Gleichung 2.*

Da die Gleichung 2. auf Grund der Gleichung $\varrho + \varrho' = 2a$ zu Stande gekommen ist, welche *nur* für die Punkte unserer Ellipse gilt, so wird 2. *nur* durch die Coordinaten *dieser* Punkte befriedigt.

Ganz allgemein versteht man unter der *Gleichung einer ebenen Curve* in Bezug auf ein gegebenes Coordinatensystem XY eine Gleichung zwischen x und y, welche für *alle* Curvenpunkte $P = \xi, \eta$ befriedigt wird und *nur durch diese.*

Ist z. B. α, β der Mittelpunkt eines Kreises vom Radius r, so hat *jeder* Punkt x, y des Kreises den Abstand r vom Punkte α, β; und *nur* ein Punkt des Kreises. Es gilt also für jeden Kreispunkt und nur für einen solchen die Gleichung:

$$3.\quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Deshalb ist 3. die *Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt α, β und dem Radius r.*

Es läfst sich fernerhin zeigen, dafs die Gleichung:

$$4.\quad ax + by + c = 0$$

für constante Werthe von a, b, c die Gleichung einer bestimmten Geraden in der Ebene XY ist, und dafs die Gleichungen aller Geraden von XY aus 4. hervorgehen, wenn man unter a, b, c alle möglichen Zahlen versteht.

Diese Auseinandersetzungen bilden die *Grundlage der ebenen analytischen Geometrie*; sie lassen sich ohne Weiteres auf den *Raum* ausdehnen.

Wir werden später auf die Gleichungen der Ellipse, ihrer Tangenten und Normalen zurückkommen, wenn die Anwendungen auf die geographisch-astronomische Ortsbestimmung dies nöthig machen werden.

Dritter Abschnitt.

Die thatsächlichen Grundlagen der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung.

---

68. Unsere Theorie ist gegründet auf bestimmte Erkenntnisse der Astronomie und der Geodäsie; dieselben sollen im Folgenden, soweit es nöthig erscheint, als Thatsachen mitgetheilt werden. Ihre Verwerthung erfolgt durch die Hilfsmittel der Analysis und der Geometrie. Die Abschnitte I. und II. verfolgten den Zweck, auf den Gebrauch dieser Hilfsmittel vorzubereiten. Es wird sich zeigen, dafs dieselben vornehmlich in der Abstraction der ideellen Himmelskugel bestehen und in der Verwerthung der trigonometrischen Functionen für diejenigen Figuren der Himmelskugel, welche als „sphärische Dreiecke" bezeichnet werden. Letztere bilden den Gegenstand der sphärischen Trigonometrie, deren Grundformeln in einem besonderen Abschnitt abgeleitet werden sollen.

Gestalt der Erde. Rotationsaxe. Schwererichtungen.

69. Der *physischen*, d. h. der von dem Luftocean umhüllten *Erdoberfläche* ist die *mathematische Erdoberfläche* zugeordnet. Als Theil der letzteren darf mit genügender Genauigkeit die Meeresfläche betrachtet werden. Diese Erdfigur heifst das *Erdsphäroid* und besitzt einen Mittelpunkt: das *Schwerecentrum.*

Das Erdsphäroid entsteht durch Drehung einer Ellipse, der sogenannten *Meridianellipse*, um die *kleine* Axe derselben (Nr. 66); letztere heifst die *Erdaxe.* Für die beiden Halbaxenlängen hat die Geodäsie ermittelt:

kleine Halbaxe:

$$b = 6356.079 \text{ km},$$

grofse Halbaxe:

$$a = 6377.397 \text{ km},$$

numerische Excentricität:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = 0{,}081\,696\,83,$$

Abplattung:

$$\frac{a - b}{a} = \frac{1}{299.1528} = 0{,}003\,342\,77.$$

Die Rotationsaxe des Erdsphäroids ist gleichzeitig die Axe, um welche sich die Erde *dreht*. Die *Erddrehung* hat den Namen *östliche Drehung*; eine Drehung um die Erdaxe im *entgegengesetzten* Sinne heifst *westliche Drehung.*

Die Schnittpunkte der Erdaxe mit dem Erdsphäroid heifsen die *Erdpole.* Derjenige Pol, von welchem aus die *östliche* Drehung als *Links*drehung erscheint, heifst der *Nordpol*; der andere der *Südpol*; von ihm aus erscheint die Erdrotation als *Rechtsdrehung.*

Legt man durch das Schwerecentrum C *die Normalebene der Erdaxe*, so erhält man die *Aequatorebene.* Sie theilt das Erdsphäroid in eine *nördliche* und *südliche Erdhälfte* und schneidet dasselbe im *Erdäquator*, welcher ein *Kreis* vom Radius a (s. oben) ist.

Jeder Erdpunkt O liefert eine ihm eigenthümliche Richtung, in welcher der Fall eines schweren Punktes erfolgt: die *Fallrichtung* oder *Schwererichtung*; die *entgegengesetzte* Richtung heifst die *Verticalrichtung.*

Die *Schwererichtung geht durch die Erdaxe*, aber im Allgemeinen *nicht* durch das *Schwerecentrum.* Dies folgt geometrisch daraus, dafs das Erdsphäroid durch Rotation einer Ellipse entstanden gedacht werden kann, und dafs die Erdaxe die Rotationsaxe ist. Im Centrum treffen sich daher nur die Schwererichtungen der Erdäquatorpunkte und der Pole. Wäre die Erde eine Kugel, so würden die Schwererichtungen *aller* Erdpunkte im Schwerecentrum zusammentreffen.

Die durch die Schwererichtung bestimmte Gerade heifst die *Verticalgerade* von O. Unter den Ebenen, welche sich durch die Verticalgerade von O legen lassen, mufs *eine* durch die *Erdaxe* gehen; sie heifst die *Meridianebene des Ortes O.*

Die *Meridianebene von O* ist also *identisch mit der Ebene, welche durch O und die Erdaxe bestimmt wird.* Wir wollen sie *mittels der Erdaxe* in zwei Hälften oder Flügel zerlegen; derjenige, welcher den Erdort enthält, soll der *obere Meridianflügel* heifsen; der andere der *untere Meridianflügel.*

Ein Ebeneflügel der Erdaxe soll im Allgemeinen ein *Stundenflügel* heifsen. Der *obere Meridianflügel eines Erdortes O* ist also *identisch mit dem Stundenflügel von O.*

Die *Raumwinkel zweier oberen Meridianflügel*, eines *oberen Meridians und des Stundenflügels eines Sternes*, und auch die *Raumwinkel zwischen den Stundenflügeln zweier Sterne* spielen eine grofse Rolle für uns.

Durch die *Meridianebene eines Ortes O* zerfällt die Erde *in Bezug auf O* in eine *westliche und östliche Erdhälfte; letztere* wird durchlaufen, wenn man einen drehbar gedachten Stundenflügel *aus der Coincidenz mit dem oberen Meridianflügel* im *östlichen* Sinne in die Coincidenz mit dem *unteren Meridianflügel* dreht; durch Fortsetzung der Drehung wird die *westliche Erdhälfte* beschrieben.

Legt man durch den Punkt *O* die Normalebene seiner Verticalgeraden, so erhält man die *Horizontebene von O* (scheinbarer Horizont). Die durch das Schwerecentrum gelegte Parallelebene heifst die *geocentrische Horizontebene* (wahrer Horizont von *O*).

Jede Ebene durch die Verticalgerade von *O* heifst eine *Verticalebene* von *O* und zerfällt mittels der Verticalgeraden in *zwei Verticalflügel.* Die *beiden Verticalflügel, welche durch den Nordpol und Südpol gehen, bilden die Meridianebene.* Die Schnittgerade der Meridianebene und der Horizontebene von *O* heifst die *Meridianlinie* von *O*; sie zerfällt durch *O* in den *Südstrahl* und *Nordstrahl*, welche die Süd- und Nordrichtung für *O* liefern. Der Südstrahl liegt in dem Vertical des Südpols, der Nordstrahl in dem Vertical des Nordpols. Jede durch *O* gelegte Gerade der Horizontebene heifst eine *Horizontale von O.*

Die Horizontale von *O*, welche normal zur horizontalen Meridianlinie liegt, heifst die *Ost-Westlinie*; sie wird durch *O* in zwei Strahlen zerfällt. Der eine liegt auf der Ostseite der Meridianebene und liefert die *Ostrichtung*; der andere liefert die *Westrichtung von O.* Die vier Richtungen N (Nord), S (Süd), E (Ost),

W (West) heifsen die *vier Cardinalrichtungen* oder *Himmelsrichtungen von O.*

Gibt man einem durch O gelegten drehbaren Horizontalstrahl eine *Rechtsdrehung* (von oben gesehen), so tritt derselbe *stets* in der Folge S, W, N, E, S durch die vier Cardinalrichtungen, gleichgiltig, ob O der nördlichen oder der südlichen Erdhälfte angehört (siehe Nr. 74). Legt man die vier Cardinalrichtungen von O durch das Erdcentrum, so liefern sie die Cardinalrichtungen der geocentrischen Horizontebene von O.

Erdbahn und Ekliptikebene.

70. Das Schwerecentrum der Erde bewegt sich um die Sonne in einer Ebene, welche die *Ebene der Ekliptik* heifst. Dieselbe schneidet die Ebene des Aequators in einer Geraden: der *Aequinoctialgeraden;* letztere geht also durch das Erdcentrum C. Legt man in der Ekliptikebene durch C eine Gerade, normal zur Aequinoctialgeraden, so erhält man die *Solstitialgerade.*

Die Erdbahn ist eine *Ellipse* (Nr. 66.) von geringer Excentricität; in *einem Brennpunkt steht die Sonne.*

Bewegt sich ein Gestirn E in der Weise um ein Gestirn S, dafs E eine Ellipse (auch Parabel oder Hyperbel) beschreibt und S in einem der Brennpunkte der Ellipse liegt, so heifst der von S nach E gezogene Brennstrahl der Radius vector des Gestirns E. Ist a die grofse Halbaxe der Ellipse, sind A und A' die Scheitel der grofsen Axe, so heifsen A und A' die *Apsidenpunkte der Bahnellipse.* Ist A der dem Brennpunkt S zunächst gelegene Scheitel, und ist f die lineare Excentricität, so hat das Gestirn in A die kleinste Entfernung von S, und in A' die gröfste; nämlich $a - f$ und $a + f$. Das Mittel ist a; deshalb heifst die halbe grofse Axe (Länge) die *mittlere Entfernung* des Gestirns E von S.

Die durch die grofse Axe der Bahnellipse gegebene Gerade heifst die *Apsidenlinie*; die Apsidenpunkte der Bahnellipse werden unterschieden als *Perihel* und *Aphel*: kleinste und gröfste Entfernung der Erde von der Sonne.

Die Neigung der Ekliptikebene gegen die Aequatorebene, also der Winkelabstand beider, heifst die *Schiefe der Ekliptik*, sie ist zur Zeit etwa $= 23^{0}\,27'$.

71. Unter den Erdorten bezeichnen wir *einen*, z. B. einen Punkt der Sternwarte von Greenwich, als *Fundamentalort für Längenzählung* und nennen die Meridianebene dieses Ortes: den *ersten oder Nullmeridian oder Fundamentalmeridian.*

Der obere Meridianflügel M_0 von Greenwich und der obere Meridianflügel M eines Ortes O bilden zwei conjugirte Raumwinkel; wir können sie als *westliche* und *östliche* unterscheiden, je nachdem sie sich von M_0 aus westlich oder östlich erstrecken.

Ist l_w der westliche, l_e der östliche Abstand des Flügels M vom Flügel M_0 im Gradmafs, so ist $l_w + l_e = 360$.

Alsdann sagen wir: Erdort O *hat die westliche* (geographische) *Länge* $+l_w$ *und die östliche Länge* $-l_e$.

$+l_w$ und $-l_e$ sind also nichts anderes als die *positive und negative Coordinate eines Flügels* der Meridianflügelschaar, in Bezug auf *dasjenige Coordinatensystem* (Nr. 44), dessen *Ursprung* der *obere Meridianflügel von Greenwich* ist, und für welches die *westliche Drehung als positive, die östliche als negative* gilt.

Ist für Erdort O die *Neigung der Verticalgeraden* v *gegen die Aequatorebene* gleich (φ), so nennt man $\varphi = +(\varphi)$ die *geographische Breite von* O und von v, wenn O der nördlichen Erdhälfte angehört; und $\varphi = -(\varphi)$ die *geographische Breite von* O und von v, wenn O der südlichen Erdhälfte angehört.

Legt man durch C den *geocentrischen Verticalstrahl* s parallel zur Verticalgeraden v, und ist l_w die westliche, $-l_e$ die östliche Länge von O, so sind l_w *und* $-l_e$ *die Polar-Abscissen*, und ist φ *die Polar-Ordinate* des geocentrischen *Verticalstrahles von* O in Bezug auf folgendes Polar-Coordinatensystem des Strahlenbüschels C (Nr. 46). Abscissenebene: die *Aequatorebene;* positive und negative Raumhälfte: die *nördliche und südliche Seite der Aequatorebene;* Abscissenaxe, d. h. Axe der Ordinatenflügel: die *Erdaxe;* Ursprung der Ordinatenflügel: der *obere Meridianflügel von Greenwich;* positive Drehung: *die westliche;* negative: *die östliche.*

72. Ist M der obere Meridianflügel von O, und σ der Stundenflügel eines Sternes S, so bilden die Flügel M und σ zwei conjugirte Raumwinkel: einen westlichen τ_w und einen östlichen τ_e ($\tau_w + \tau_e = 360$ für Gradmafs) in Bezug auf M.

Man nennt τ_w *den westlichen* und $-\tau_\varepsilon$ den *östlichen Stundenwinkel* von Stern *S*.

$+\tau_w$ und $-\tau_\varepsilon$ sind also nichts anderes als die positive und negative Coordinate eines Stundenflügels, d. h. eines Flügels der durch die Erdaxe bestimmten Schaar in Bezug auf dasjenige Coordinatensystem, dessen *Ursprung der Meridianflügel des Ortes O* ist, und für welches die *westliche Drehung als positive*, *die östliche Drehung als negative gilt.*

Es sei noch einmal hervorgehoben, dafs die Schaar der Meridianflügel identisch mit der Schaar der Stundenflügel ist, und dafs ein *Flügel der Erdaxe Meridianflügel* heifst, wenn er durch einen *Erdort* bestimmt wird, dagegen *Stundenflügel*, wenn er durch einen *Stern* bestimmt wird.

Unsere Aufgabe besteht zunächst darin, zu zeigen, wie in jedem einzelnen Falle die geographische Breite φ und der Stundenwinkel τ für einen Ort *O* und einen Stern gefunden wird. Die Ermittelung von τ, d. h. von τ_w oder τ_ε, heifst *Zeitbestimmung*. Es ist danach zu zeigen, wie die *geographische Länge* des Ortes *O* durch Zeitbestimmungen gewonnen wird.

Die Himmelskugel; ihre Punkte, Kreise und Halbkreise.

73. Für eine *beliebige* Kugel war erkannt worden: sind *T* und *S* zwei Kugelpunkte, *t* und *s* ihre Radien, so haben *für conforme Einheiten* der ebene Winkel (t, s) und der in ihnen enthaltene Bogen $\widehat{TS}$ *denselben* Werth.

Ist *a* eine Gerade durch den Mittelpunkt der Kugel, AA' das Schnittpunktpaar beider; ist λ, μ ein Flügelpaar der Kante *a*, und h_λ, h_μ sein Schnitt mit der Kugel, so sind h_λ, h_μ zwei über AA' gespannte Halbkreise. Schneidet die Polare von AA' den Halbkreis h_λ in dem Kugelpunkte *L*, den Halbkreis h_μ in dem Kugelpunkte *M*, so hat jeder der beiden conjugirten Bogen $\widehat{LM}$ denselben Werth, wie derjenige Raumwinkel (λ, μ) und sphärische Winkel (h_λ, h_μ), welcher den Bogen $\widehat{LM}$ enthält.

Es lassen sich also die Werthe aller ins Auge gefafsten Ebene-, Kugel- und Raumwinkel durch die Werthe von Bogen derselben Kugel ausdrücken; und es ist hierbei ganz gleichgiltig, welchen Radius die Kugel besitzt.

Diejenige Kugel, deren sich die sphärische Astronomie zu diesem Zwecke mit gröfstem Nutzen bedient, ist die *ideelle Himmelskugel.* Ihr Mittelpunkt ist das Erdcentrum; ihr Radius mufs die Bedingung erfüllen, dafs alle Gestirne von der Kugel eingeschlossen werden.

Diese Himmelskugel wollen wir zunächst schneiden mit all' den Strahlen, Geraden, Flügeln und Ebenen, zu denen die Erddrehung, die Erdbahn, die Erdfigur, ihre Radien und Schwererichtungen geführt haben (Nr. 69 ff.).

Wegen der ununterbrochenen Veränderungen, welche die gegenseitige Lage der in Betracht kommenden geometrischen Elemente erfährt, denken wir uns die folgende Betrachtung in einem beliebigen, aber bestimmten Zeitmoment angestellt.

Die Schnittpunkte der verlängerten Erdaxe mit der Himmelskugel werden die *Himmelspole P P'* genannt und als *nördlicher und südlicher Himmelspol* unterschieden. Ihre *Polare* ist der Schnitt der Aequatorebene und heifst *Himmelsäquator;* er theilt die Himmelskugel in eine *nördliche* und *südliche Halbkugel.* Man nennt die *Pole jedes Kreises,* welcher die Kugel in zwei *Halbkugeln* zerlegt, die *Scheitel* derselben; und es ist der Nordpol der Scheitel der nördlichen Halbkugel und der Südpol der Scheitel der südlichen Halbkugel.

Der Schnitt der Ekliptikebene heifst die *Ekliptik;* ihre Pole werden *nördlicher und südlicher Ekliptikpol* genannt. Die Aequinoctialgerade schneidet selbstverständlich die Himmelskugel in den beiden Schnittpunkten des Aequators und der Ekliptik. Sie heifsen die *Aequinoctien* und werden als *Frühlingspunkt* ♈ und *Herbstpunkt* ♎ folgendermafsen unterschieden.

Bewegt sich auf der Ekliptik ein Punkt so, dafs sein Stundenflügel eine östliche Drehung ausführt, so erscheint diese Bewegung, von der Nordseite betrachtet, als eine Linksdrehung. Man sagt dann: der Punkt bewegt sich im *östlichen Sinne auf der Ekliptik.* Bei dieser Bewegung tritt der Punkt *zweimal* durch den Aequator und gelangt dabei das *eine* Mal von der südlichen Hemisphäre auf die nördliche; das *Aequinoctium, in welchem dieses stattfindet,* heifst der *Frühlingspunkt,* das andere der *Herbstpunkt.*

Durch die Aequinoctien wird die Ekliptik in einen nördlichen und südlichen Halbkreis zerlegt; die Mitten dieser Halbkreise

heifsen das *nördliche* (auch Sommer-) und *südliche* (auch Winter-) *Solstiz;* diese Solstitien sind die Schnittpunkte der Solstitialgeraden, welche normal liegt zur Aequinoctialgeraden.

Der Kreis, welcher durch die Himmelspole und die Aequinoctien geht, heifst der *Aequinoctialkolur;* der Kreis, welcher durch die Himmelspole und die Solstitien geht, heifst der *Solstitialkolur.*

Die grofse Axe der Erdbahn schneidet die Himmelskugel in deren *Apsidenpunkten.* Der eine heifst das *Aphel* und ist der Schnittpunkt des vom Aphel der Erdbahn (Nr. 70) durch die Sonne gelegten Strahles, der andere heifst das *Perihel*, und ist der Schnittpunkt des vom Perihel nach der Sonne gerichteten Strahles.

74. Jeder Stundenflügel schneidet die Himmelskugel in einem Halbkreise, welcher zwischen den Himmelspolen PP' ausgespannt ist; er soll schlechtweg als ein *Stundenkreis* bezeichnet werden; man mufs ihn also durch den Gegenhalbkreis ergänzt denken, um einen vollen Kreis zu erhalten.

Der Schnitt eines oberen Meridianflügels mit der Kugel heifst ein *oberer Meridian;* der Schnitt des Gegenflügels heifst der zugeordnete *untere Meridian;* beide Halbkreise sind Gegenhalbkreise der Schaar PP' und bilden einen *Himmelsmeridian.*

Alle *diese Kreise liegen normal zum Aequator*, weil die Himmelspole die Pole des Aequators sind (Nr. 42, 4.).

Die *Verticalrichtung eines Erdortes* O schneidet die Himmelskugel in einem Punkte V, und der geocentrische Parallelstrahl in einem Punkte Z, welcher das *Zenit von* O heifst. Der Winkel, unter welchem die Punkte VZ der Himmelskugel von C aus erscheinen, ist wegen des unendlich grofsen Radius derselben so klein, dafs sein Werth $= 0$ gesetzt werden darf. Wären V und Z *leuchtende Punkte*, so würden sie uns als ein *einziger leuchtender Punkt* erscheinen. Man sagt deshalb, die Ortsverticale trifft die Kugel im Zenit Z. Der Gegenpunkt von Z heifst das *Nadir* (Na) *von* O; in ihm wird die Kugel von der Schwererichtung des Ortes O getroffen.

Der Kreis, in welchem die *Horizontebene von* O schneidet, ist für uns ebenfalls gleichbedeutend mit dem Kreise, in welchem die *geocentrische Horizontebene* (S. 93) schneidet; denn wenn *beide Kreise aus leuchtenden Punkten* beständen, so würden sie uns als *ein einziger leuchtender Kreis* erscheinen. Dieser Kreis ist die

Polare von Zenit und Nadir und heifst der *Horizont des Ortes O, wie auch seines Zenits Z.*

Die vier Cardinalrichtungen der Horizontebene schneiden den Horizontkreis in vier Punkten, welche Quadrantenabstand von einander haben; sie heifsen der Süd-, West-, Nord-, Ostpunkt (S, W, N, E) oder die *vier Cardinalpunkte* des Horizonts und folgen in der gegebenen Anordnung *rechts* herum auf einander, wenn man sie von der Zenitseite des Horizonts betrachtet.

Dies ergibt sich aus folgender Ueberlegung (s. Fig. 22, S. 109).

Es bedeute Z beliebig ein nördliches oder südliches Zenit und P den gleichnamigen Himmelspol; alsdann liegen Z und P auf derselben Seite des Aequators und Kreis ZP stellt den Meridian von Z vor.

Erscheint die Drehung eines Stundenkreises um PP' für den Standpunkt P als eine Rechtsdrehung, bezw. Linksdrehung, so bewegt sich der Schnittpunkt des Stundenkreises mit dem Horizont von Z, für den auf der Zenitseite des Horizonts befindlichen Beschauer, gleichfalls rechts herum, bezw. links herum.

Ist H_μ der Schnittpunkt des oberen Meridians von Z mit dem Horizont und dreht sich der Stundenkreis aus dem oberen Meridian westlich um einen Quadranten, so coincidirt er mit dem Stundenkreis des Westpunktes W (S. 93); sein Schnittpunkt mit dem Horizont hat dabei den Quadranten $\widehat{H_\mu W}$ beschrieben.

Für ein *nördliches* Zenit ist die westliche Drehung eine Rechtsdrehung und der Horizontpunkt H_μ ist der *Südpunkt*; es hat also W von S Quadrantenabstand nach *rechts*, und die Cardinalpunkte haben nach rechts die Folge $S\,W\,N\,E$.

Für ein *südliches* Zenit ist die westliche Drehung eine Linksdrehung und der Horizontpunkt H_μ ist der *Nordpunkt*; es hat also W von N Quadrantenabstand nach links; folglich hat W von dem Gegenpunkt S des Nordpunktes Quadrantenabstand nach *rechts*, und die Cardinalpunkte haben wiederum nach rechts die Folge $S\,W\,N\,E$.

75. Jeder *Verticalflügel von O* schneidet die Himmelskugel in einem über Zenit und Nadir gespannten Halbkreis; er soll schlechtweg ein *Vertical* oder *Verticalkreis* in Bezug auf O heifsen. Derselbe bildet mit seinem Gegenvertical einen Kreis, welcher normal zum Horizont liegt, weil er durch die Pole des letzteren

geht (Nr. 42, 4.). Also: *alle durch das Zenit von O gelegten gröfsten Kreise der Himmelskugel liegen normal zu dem Horizont von O.*

Der obere Meridianflügel enthält den Verticalstrahl von O, welcher in Z schneidet; folglich liegt Z auf dem *oberen Meridian von O*, und es ist der *obere Meridian von O der Stundenkreis des Zenits von O.* Analog ist der *untere Meridian von O der Stundenkreis des Nadirs von O.*

Die Verticalkreise des Nord- und Südpols (Gegenhalbkreise) bilden gemeinsam einen Kreis, welcher die Punkte PP' (Pole des Aequators) und die Punkte ZNa (Pole des Horizonts) enthält; dieser Kreis ist identisch mit dem Meridian, da letzterer durch dieselben Punkte geht (Fig. 22, S. 109).

Die *Schnittpunkte des Aequators und des Horizonts von O sind also die Pole des Meridians von O* (Nr. 42, 11.); folglich haben dieselben Quadrantenabstand vom Nord- und Südpunkt des Horizonts, welche beide auf dem Meridian liegen (Nr. 42, 1.). Es ist einer derselben der Ostpunkt E und der andere der Westpunkt W des Horizonts. Also:

Ost- und Westpunkt von O sind einerseit die Pole des Meridians von O und andererseit die Schnittpunkte des Aequators mit dem Horizont von O.

Der Kreis, welcher durch die Himmelspole und die Ost-Westpunkte geht, heifst der *Sechsstundenkreis von O;* er liegt *normal zum Meridian von O*, weil er die Pole des letzteren enthält (Nr. 42, 4.).

Der Kreis, welcher durch Zenit und Nadir von O und durch die Ost-Westpunkte geht, heifst der *erste* (I.) *Vertical von O;* er liegt *normal zu dem Horizont von O*, weil er die Pole des letzteren enthält.

Die Höhenparallaxe.

76. Der von dem Erdcentrum C nach einem Stern S gerichtete Strahl schneidet die Himmelskugel in einem Punkte, welcher die *Projection des Sternes auf die Himmelskugel* heifst und als „*Stern*“ *S der Himmelskugel* bezeichnet wird.

Ist der Stern so weit von dem Erdort O und von C entfernt, dafs $\overline{OS}$ *parallel* $\overline{CS}$ erscheint, so *trifft auch der Strahl*

$\overline{OS}$ *für unser Wahrnehmungsvermögen die Himmelskugel im Punkte S derselben* (vergl. Nr. 74.).

Sind aber $\overline{OS}$ und $\overline{CS}$ *nicht parallel*, sondern haben sie den Richtungsunterschied p, so trifft $\overline{OS}$ die Himmelskugel *nicht im Punkte S, sondern in einem anderen Punkte* S_p, welchen wir das *parallaktische Gestirn* S_p in Bezug auf O nennen wollen.

Der Punkt, in welchem der Strahl $\overline{CO}$, d. h. der *Ortsradius*, die Himmelskugel trifft, heifst das *geocentrische Zenit* Z'. Wäre die Erde eine Kugel, so würden Z und Z' zusammenfallen. $p = \widehat{S S_p}$ heifst die *Höhenparallaxe* von S in Bezug auf $\overline{CO}$. $Z' S S_p$ liegen stets auf demselben gröfsten Kreise.

Diese Andeutungen müssen vorläufig genügen; denn wir wollen zunächst nur Sterne betrachten, welche *keine Parallaxe* besitzen, für welche also S_p nach S fällt; das sind die *Fixsterne*.

Sphärische Coordinatensysteme der Himmelskugel.

77. Der allgemeine Begriff eines sphärischen Coordinatensystems für eine beliebige Kugel ist bereits in Nr. 47 gegeben worden. Die Festsetzungen verlangten Wahl eines Hauptkreises zum Abscissenkreise; Bestimmung des positiven Poles; Wahl eines Ordinatenkreises als Ursprung; Bestimmung der positiven Drehung eines Ordinatenkreises.

Für die verschiedenen Arten der sphärischen Coordinatensysteme auf der Himmelskugel dienen als Abscissenkreise: a) der Aequator, b) die Ekliptik, c) der Horizont eines gegebenen Zenits. Demgemäfs unterscheiden wir: A) Aequatoriale Systeme, B) das Ekliptische System, C) Horizontale oder azimutale Systeme.

Die Ordinatenkreise aller äquatorialen Systeme sind nichts anderes als *Stundenkreise* von Sternen oder *obere Meridiane* von Zeniten.

1. Aequatoriales System des Frühlingspunktes ♈.

78. Abscissenkreis: *der Aequator;* positiver Pol: *der nördliche Himmelspol;* Ursprung der Ordinatenkreise: *der Stundenkreis des* ♈; positive Drehung des Ordinatenkreises: *die östliche Drehung.*

Ist der Punkt, dessen Lage auf der Himmelskugel durch dieses System bestimmt werden soll, ein *„Stern“* (Nr. 76.), so

erhält die *positive Abscisse* α den Namen *Rectascension*, wofür abgekürzt AR gesetzt wird; und seine *Ordinate* δ den Namen *Declination.*

Ist dagegen der Punkt ein *Zenit*, so erhält seine positive Abscisse ϑ den Namen *Sternzeit*, seine Ordinate φ den Namen *geographische Breite.* Gemäfs Nr. 39. ist die Ordinate φ des Zenits Z gleich der geographischen Breite φ des Ortes O (Nr. 71.), dessen Verticalstrahl nach Z gerichtet ist.

2. Aequatoriales System eines oberen Meridians μ.

79. Abscissenkreis: *der Aequator*; positiver Pol: *der nördliche Himmelspol;* Ursprung der Ordinatenkreise: *der obere Meridian* μ; positive Drehung der Ordinatenkreise: *die westliche Drehung.*

In diesem System heifst die positive Abscisse eines *Sterns:* sein *Stundenwinkel* t*;* die negative Abscisse: sein *östlicher Stundenwinkel* (Nr. 72.); die positive Abscisse eines Zenits: seine *westliche Längendifferenz*; die negative: seine *östliche Längendifferenz* in Bezug auf den oberen Meridian μ.

Die Ordinaten der Sterne und Zenite sind identisch mit denen des ersten Systems, weil beide Systeme den nördlichen Himmelspol als positiven Pol besitzen.

Von den soeben beschriebenen Coordinatensystemen gibt es so viele, als es obere Meridiane gibt. Ein *ausgezeichnetes System dieser Classe* wird dasjenige sein, welches den *Fundamentalmeridian als Ursprung der Ordinatenkreise* besitzt.

Für dieses System soll im Folgenden die positive Abscisse eines Sternes, d. h. sein Stundenwinkel, mit τ, statt mit t, bezeichnet werden. Die positive Abscisse eines Zenites Z wird offenbar gleich der *westlichen Länge* des Erdortes und seines Zenites Z; die negative Abscisse ist die *östliche Länge* (Nr. 71.).

80. Es lassen sich nun eben so einfache wie wichtige *Relationen* aufstellen *zwischen den Abscissen der äquatorialen sphärischen Coordinatensysteme*, d. h. der Systeme, für welche der Aequator den Fundamentalkreis liefert; nämlich Relationen zwischen den *Längen zweier oberen Meridiane* und den *Stundenwinkeln* desselben Sternes in Bezug auf diese beiden Meridiane; ferner zwischen den

Rectascensionen zweier Sterne und ihren *Stundenwinkeln* in Bezug auf irgend einen oberen Meridian.

Zuvor aber soll folgende Betrachtung eingeschaltet werden, deren Zweckmäſsigkeit sehr bald erkannt werden wird.

Es sei $\tilde{A}$ eine beliebige positive oder negative Zahl vom numerischen Betrage A; alsdann soll $(\tilde{A})^0_{360}$ diejenige *positive, zwischen 0 und 360 gelegene Zahl* bezeichnen, welche *von $\tilde{A}$ um ein ganzes Vielfaches von 360 verschieden ist.* Liefert die Zahl A bei der Division mit 360 den Quotienten q und den Rest r, so ist:

$$A = q.360 + r,$$

wo r zwischen 0 und 360 liegt; und

$$+A - r = q.360,$$

d. h. r ist die zwischen 0 und 360 gelegene Zahl, welche sich von $+A$ um ein ganzes Vielfaches von 360 unterscheidet; demgemäſs setzen wir:

$$(+A)^0_{360} = r.$$

Es ist:

$$-A = -q.360 - r = -(q+1)\,360 + (360 - r),$$

also:

$$(-A) - (360 - r) = -(q+1).360;$$

da r zwischen 0 und 360 liegt, so liegt auch $(360 - r)$ zwischen denselben Grenzen; es ist also $(360 - r)$ diejenige zwischen 0 und 360 gelegene Zahl, welche sich von $-A$ um ein ganzes Vielfaches von 360 unterscheidet. Demgemäſs setzen wir:

$$(-A)^0_{360} = 360 - r = 360 - (+A)^0_{360}.$$

Setzt man in der vorstehenden Betrachtung die Zahl 24, bezw. die Zahl 2π an Stelle der Zahl 360, so erhält man die Definition der Ausdrücke:

$$(\tilde{A})^0_{24}, \text{ bezw. } (\tilde{A})^0_{2\pi}.$$

Ist für die Punktschaar eines Kreises k (Nr. 36) ein Coordinatensystem mit Ursprung O (Nr. 44, 51) festgesetzt, so liefert die Zahl $\tilde{A}$ für die Gradeinheit einen in O beginnenden Kreisweg, dessen Endpunkt die positive cyklische Coordinate $(\tilde{A})^0_{360}$ besitzt. Ist dagegen die Stundeneinheit, bezw. die Bogenmaſseinheit gegeben, so hat der Endpunkt die positive cyklische Coordinate:

$$(\tilde{A})^0_{24}, \text{ bezw. } (\tilde{A})^0_{2\pi}.$$

Der Ausdruck $(\tilde{A})^{0}_{360}$ bleibt unverändert, wenn man $\tilde{A}$ um ein beliebiges positives oder negatives Vielfaches von 360 vermehrt; analoges gilt in Bezug auf $(\tilde{A})^{0}_{24}$ und $(\tilde{A})^{''}_{2\pi}$, wenn 24, bezw. 2π an Stelle von 360 tritt.

Elementargleichungen zwischen den äquatorialen Abscissen der Rectascensionen, Längen und Stundenwinkel.

81. Für die einzelnen Fälle der nun anzustellenden Betrachtung soll jeder Kreis auf S. 105 und 107 den *Aequator*, *von der Nordseite betrachtet*, darstellen. Die darauf verzeichneten Punkte sind der Frühlingspunkt ♈ und die Schnittpunkte bestimmter Stundenkreise; der Fundamentalmeridian der Längenzählung (Nr. 79.) liefert den Punkt A_0, der Stundenkreis (obere Meridian) des Zenits Z, bezw. Z' liefert den Punkt A_μ, bezw. A'_μ; der Stundenkreis eines Sternes S liefert den Punkt S_0. Da der Aequator die Polare (Nr. 73.) der Himmelspole ist, und da die Stundenkreise (Halbkreise) zwischen den *Himmelspolen* ausgespannt sind, so sind A_μ, A'_μ, S_0 die sphärischen Projectionen der Kugelpunkte Z, Z', S auf den Aequator (Nr. 41.).

Jedes Punktpaar RS eines Kreises zerfällt denselben in zwei conjugirte Bogen, deren Werthsumme, für die Gradeinheit, gleich 360° ist. Also ist „Bogen $\widehat{RS}$“ keine eindeutige Bezeichnung. Die doppelte Art, in welcher der Aequator durchlaufen werden kann, ist bereits als östlicher und westlicher Umlauf charakterisirt worden. Da wir den Aequator von der Nordseite aus betrachten, so bleibt bei der östlichen Bewegung der Mittelpunkt zur Linken, bei der westlichen Bewegung zur Rechten.

Sind R und S zwei Aequatorpunkte, so soll unter dem *westlichen Bogen* $\widehat{RS}$ derjenige Bogen verstanden werden, auf welchem man durch die *westliche Bewegung von R nach S gelangt*, und unter dem *östlichen Bogen* $\widehat{RS}$ derjenige Bogen, auf welchem man durch die *östliche Bewegung von R nach S gelangt.*

Es ist also für die Einheit des Grades stets:

Der Werth des westlichen Bogens $\widehat{RS}$ + dem Werth des östlichen Bogens $\widehat{RS} = 360°$.

82. Aus den Definitionen für Rectascension (AR), Sternzeit und Stundenwinkel (Nr. 78., 79.), folgt gemäfs Nr. 39.:

Der östliche Bogen $\widehat{\gamma S_0}$ (Fig. 16) ist gleich der AR des Sternes S; nennen wir dieselbe α, so ist der westliche Bogen $\widehat{\gamma S_0} = 360^0 - \alpha$. Der östliche Bogen $\widehat{\gamma A_\mu}$ ist gleich der Sternzeit ϑ und gleich dem westlichen Bogen $\widehat{A_\mu \gamma}$, d. h. gleich dem Stundenwinkel des γ in Bezug auf den durch A_μ bestimmten oberen Meridian.

Fig. 16.

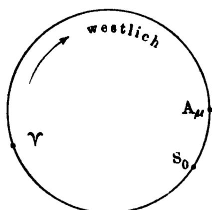
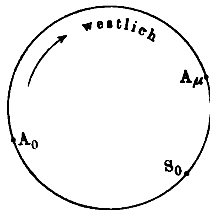


Fig. 17.



Der westliche Bogen $\widehat{A_0 S_0}$ (Fig. 17) ist gleich dem Stundenwinkel τ des Sternes S in Bezug auf den Fundamentalmeridian.

Der westliche Bogen $\widehat{A_\mu S_0}$ ist $=$ dem Stundenwinkel t des Sternes S in Bezug auf den durch A_μ bestimmten oberen Meridian.

Jede der nun folgenden Betrachtungen bezieht sich auf einen beliebigen, aber fixirten Zeitpunkt.

Es seien gegeben zwei obere Meridiane. Dieselben schneiden den Aequator in A_μ und A'_μ; t und t' seien die Stundenwinkel des

Fig. 18.

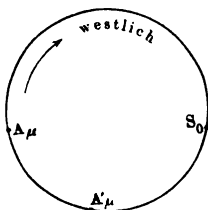
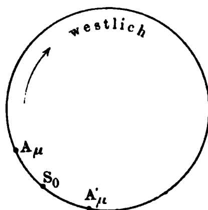


Fig. 19.



Sternes S in Bezug auf die beiden Meridiane. Liegt die Sternprojection S_0 auf dem *westlichen* Bogen $\widehat{A_\mu A'_\mu}$ (Fig. 18), so ist $t' - t$ (als Differenz der westlichen Bogen $\widehat{A'_\mu S_0}$ und $\widehat{A_\mu S_0}$) gleich dem *westlichen* Bogen $\widehat{A'_\mu A_\mu}$. Liegt dagegen S_0 auf dem *östlichen* Bogen $\widehat{A_\mu A'_\mu}$ (Fig. 19), so ist $t - t'$ (als Differenz der westlichen Bogen $\widehat{A_\mu S_0}$ und $\widehat{A'_\mu S_0}$) gleich dem *östlichen* Bogen $\widehat{A'_\mu A_\mu}$.

Demnach ist der numerische Werth von $t' - t$ gleich dem *westlichen Abstand* des Meridians A_μ von dem Meridian A'_μ,

wenn $t' - t$ *positiv* ist; und gleich dem *östlichen Abstand*, wenn $t' - t$ *negativ* ist. Diese beiden Abstände sind also die *westliche und östliche Längendifferenz* des Meridians A_μ gegen den Meridian A'_μ. (Nr. 79.)

Die *Ermittelung der Längendifferenz* eines Meridians A_μ gegen einen Meridian A'_μ ist daher möglich, wenn für *irgend einen Zeitmoment die Stundenwinkel eines beliebigen Gestirns in Bezug auf A_μ und A'_μ bekannt sind.*

83. Wenn der obere Meridian A'_μ, dessen Wahl ganz beliebig sein durfte, mit dem Fundamentalmeridian A_0 zusammenfällt, so wird $t' = \tau$ und die beiden Längendifferenzen von A_μ gegen A'_μ gehen über in die *westliche und östliche Länge von* A_μ (Nr. 79); also:

Ist τ der Stundenwinkel eines Sternes in Bezug auf den Fundamentalmeridian, t der Stundenwinkel desselben Sternes in Bezug auf den Meridian eines Erdortes O (beide Stundenwinkel für denselben Zeitmoment geltend), *so ist die Differenz $\tau - t$ gleich der westlichen Länge, wenn $\tau - t$ positiv ist, und gleich der östlichen Länge, wenn $\tau - t$ negativ ist.*

Ist λ der westliche Abstand des Meridians A_μ vom Nullmeridian, so ist die westliche Länge λ entweder gleich $\tau - t$ oder gleich $\tau - t + 360^0$, also gemäfs Nr. 80 *stets:*

$$(A) \qquad \lambda = (\tau - t)^0_{360}.$$

Dies ist die *Fundamentalgleichung der Längenbestimmung.*

Da entweder $\lambda = \tau - t$ oder $\lambda = \tau - t + 360^0$, so ist entweder $\tau = \lambda + t$ oder $\tau = \lambda + t - 360^0$.

Gleichzeitig mit dem oberen Meridian der westlichen Länge λ wollen wir einen zweiten oberen Meridian der westlichen Länge λ' betrachten, und unter t' den Stundenwinkel des Sternes S in dem fixirten Zeitmoment verstehen. Dann ist entweder $\tau = \lambda' + t'$ oder $\tau = \lambda' + t' - 360^0$.

Es ist also, wenn beide für τ aufgestellten Gleichungspaare verglichen werden, entweder $\lambda + t = \lambda' + t'$ oder $\lambda + t = \lambda' + t' - 360^0$ oder $\lambda + t = \lambda' + t' + 360^0$.

Die erste Gleichung liefert $\lambda = \lambda' + t' - t$, die zweite Gleichung liefert $\lambda = \lambda' + t' - t - 360^0$ und die dritte Gleichung liefert $\lambda = \lambda' + t' - t + 360^0$; da λ als westliche Länge stets positiv ist und zwischen 0 und 360^0 liegt, so mufs stets sein:

$$\lambda = (\lambda' + t' - t)^0_{360}.$$

Verfahren wir ebenso mit λ', t', t und bedenken, dafs auch diese Zahlen als westliche Längen und westliche Stundenwinkel zwischen 0 und 360° liegen, so erhalten wir folgende Zusammenstellung:

I. $\tau = (t + \lambda)^0_{360}$, $t = (\tau - \lambda)^0_{360}$, $\lambda = (\tau - t)^0_{360}$,

II. $\lambda = (\lambda' + t' - t)^0_{360}$, $\lambda' = (\lambda + t - t')^0_{360}$,

III. $t = (t' + \lambda' - \lambda)^0_{360}$, $t' = (t + \lambda - \lambda')^0_{360}$.

Diese Gleichungen gelten für *denselben* Zeitmoment, und es bedeuten darin τ, t, t' die Werthe der *westlichen* Stundenwinkel *desselben* Gestirns in Bezug auf die oberen Meridiane der *westlichen* Längen 0, λ, λ'.

84. Es sei nunmehr auf dem Aequator für einen bestimmten Zeitmoment gegeben der *Frühlingspunkt* ♈, die Projection S_0 des Sternes S und der Schnittpunkt A_μ eines oberen Meridians. Dann ist Sternzeit ϑ = dem östlichen Bogen $\widehat{♈ A_\mu}$ und = dem westlichen Bogen $\widehat{A_\mu ♈}$; Rectascension α von Stern S = dem östlichen Bogen $\widehat{♈ S_0}$; Stundenwinkel t von S in Bezug auf Meridian A_μ = dem westlichen Bogen $\widehat{A_\mu S_0}$.

Der Aequatorkreis hat für Gradmafs den Werth 360°.

Fig. 20.

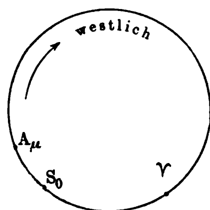
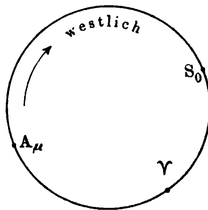


Fig. 21.



Liegt A_μ auf dem *westlichen* Bogen $\widehat{S_0 ♈}$ (Fig. 20) und durchläuft man den Aequator westlich, so liefert die Werthsumme der drei westlichen Bogen $\widehat{♈ S_0}$, $\widehat{S_0 A_\mu}$, $\widehat{A_\mu ♈}$:

$360^0 = (360^0 - \alpha) + (360^0 - t) + \vartheta$, d. h. $\vartheta = t + \alpha - 360^0$.

Liegt dagegen A_μ auf dem *östlichen* Bogen $\widehat{S_0 ♈}$ (Fig. 21), so erhält man:

$$360^0 = (360^0 - \vartheta) + t + \alpha, \text{ d. h. } \vartheta = t + \alpha.$$

Da ϑ, t, α zwischen 0 und 360° liegen, so erhält man in beiden Fällen:

(A) $$\vartheta = (t + \alpha)^0_{360},$$

und hieraus:

I. $$t = (\vartheta - \alpha)^0_{360}, \quad \alpha = (\vartheta - t)^0_{360}.$$

Für $t = 0$ tritt der Stundenkreis eines Sternes durch den oberen Meridian; man sagt: *der Stern culminirt.* Wird $\vartheta = \alpha$, so wird $t = 0$, d. h. *ein Stern der Rectascension* α *culminirt zur Sternzeit* α.

Für einen Stern S' von der Rectascension α' und dem Stundenwinkel t' in Bezug auf den oberen Meridian von A_u und denselben Zeitmoment ist laut (A):

$$\vartheta = (t' + \alpha')^0_{360}.$$

Setzt man beide Werthe von ϑ einander gleich, so wird:

$$(t + \alpha)^0_{360} = (t' + \alpha')^0_{360};$$

dieser Gleichung kann man, weil t, t', α, α' sämmtlich zwischen 0 und 360 liegen, die vier Formen geben:

II. $$\alpha = (\alpha' + t' - t)^0_{360}, \quad \alpha' = (\alpha + t - t')^0_{360},$$
III. $$t = (t' + \alpha' - \alpha)^0_{360}, \quad t' = (t + \alpha - \alpha')^0_{360}.$$

3. Das ekliptische System des Frühlingspunktes $\vee$.

85. Abscissenkreis: *die Ekliptik;* positiver Pol: *der auf der nördlichen Halbkugel befindliche Pol;* Ursprung der Ordinatenkreise: *der Ordinatenkreis des* $\vee$; positive Drehung der Ordinatenkeise: *die östliche Drehung*, d. h. die Drehung, bei welcher der Schnittpunkt mit dem Aequator im östlichen Sinne des Aequators fortschreitet.

In diesem System heifsen die Abscissen: *ekliptische Längen;* die Ordinaten: *ekliptische Breiten;* die Ordinatenkreise: *Längenkreise;* die Parallelkreise der Ekliptik: *ekliptische Breitekreise.*

4. Die horizontalen oder azimutalen Systeme.

86. Jedem Ort ist durch sein Zenit Z und den Vertical seines Südpunktes (Nr. 74.) das folgende System zugeordnet:

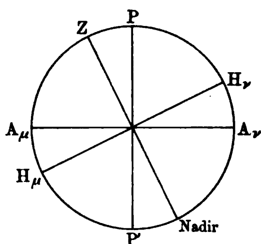
Abscissenkreis: *der Horizont von* Z; positiver Pol: *das Zenit* Z; Ursprung der Ordinatenkreise: *der Vertical* des *Südpunktes;* positive Drehung der Ordinatenkreise: *die Rechtsdrehung*, für welche $SWNE$ die Folge der Cardinalpunkte ist (S. 99).

In diesem System heifsen die Abscissen: *Azimute a;* die Ordinaten: *Höhen h;* die Ordinatenkreise: *Verticale* oder *Verticalkreise.*

Die Höhe h eines Gestirns ist also numerisch gleich dem Abstand desselben vom Horizont und hat das positive oder negative Zeichen, je nachdem das Gestirn auf der Zenit- oder Nadirseite des Horizontes liegt.

Der Kreis (Fig. 22) bedeute den oberen und unteren Meridian für das Zenit Z; die Schnittpunkte des oberen Meridians mit dem Aequator, bezw. dem Horizont seien A_μ, H_μ; die des unteren Meridians A_ν, H_ν. PP' bezeichnen die beiden Himmelspole. Ist φ die geographische Breite von Z, und (φ) ihr Betrag, so ist

Fig. 22.



$\widehat{A_\mu Z} = (\varphi)$, $\widehat{A_\mu H_\mu} = \widehat{A_\nu H_\nu} = 90^0 - (\varphi)$.

Die Höhen der Himmelspole in Bezug auf das azimutale Coordinatensystem von Z sind numerisch gegeben durch die Werthe der congruenten Bogen $\widehat{PH_\nu}$ und $\widehat{P'H_\mu}$, also einander gleich; es sei (h) ihr Werth. Ferner ist $\widehat{PH_\nu} = \widehat{A_\mu Z}$, also $(h) = (\varphi)$, d. h. der Aequatorabstand des Zenits ist gleich dem Horizontabstand jedes Poles.

Unter *Polhöhe* wird die *Höhe des Nordpols* verstanden. Ist Z ein nördliches Zenit, P also der Nordpol, so ist die geographische Breite von Z gleich $+(\varphi)$ und die *Polhöhe* gleich $+(h)$. Ist Z ein südliches Zenit, also P' der Nordpol, so ist die geographische Breite von Z gleich $-(\varphi)$ und die Höhe des Nordpols gleich $-(h)$. Es ist also in beiden Fällen *die geographische Breite eines Zenits Z gleich der Polhöhe,* d. h. *gleich der Höhe des Nordpols in Bezug auf den Horizont von Z.*

Unter der *Zenitdistanz z eines Gestirns* wird sein sphärischer Abstand vom Zenit Z verstanden; folglich ist, wenn h die Höhe desselben Gestirns in Bezug auf den Horizont von Z bedeutet:

$$z = 90^0 - h;$$

z ist stets eine positive Zahl; z wird $< 90^0$, wenn h eine positive Zahl ist, d. h. wenn sich das Gestirn auf der Zenitseite des Horizonts, also *über* dem Horizont befindet; z wird $> 90^0$, wenn h negativ ist, d. h. wenn das Gestirn *unter* dem Horizont steht.

Die Zenitdistanzen haben für unsere Ortsbestimmungen eine grofse Bedeutung, weil sie mittels leicht aufzustellender Instrumente direct mefsbar sind.

Von den scheinbaren Bewegungen.
Die rotirende Himmelskugel der Gestirne und die ruhende Himmelskugel der Zenite.

87. Die sichtbaren Gestirne machen allerorten den Eindruck, als ob sie sich in gleichen Entfernungen von uns befänden, als ob sie auf der Himmelskugel lägen und letztere um die Pole rotirte. Wir wollen sie die scheinbar *rotirende* oder *gestirnte* Himmelskugel nennen. Die identische Kugel, aber scheinbar *frei von Rotation*, soll die scheinbar *ruhende* oder *ungestirnte* Himmelskugel heifsen. Auf ihr liegen alle Zenite, Meridiane und Horizonte, kurz alle Punkte und Kreise, welche uns durch die Erde geliefert werden, d. h. irdischen Ursprungs sind.

Wir unterscheiden also für die scheinbare Bewegung die *rotirende Himmelskugel der Gestirne* und die mit ihr zusammenfallende *ruhende Himmelskugel der Zenite.*

Könnte der Meridian unseres Ortes leuchten, so würde uns seine sichtbare Hälfte als ein feststehender, zwischen dem Nord- und Südpunkte des Horizonts ausgespannter Verticalhalbkreis erscheinen, dessen Mitte das Zenit ist. Eben weil wir uns der östlichen Erddrehung nicht bewufst werden, erscheint uns die *gestirnte Himmelskugel* in *westlicher Drehung* begriffen, und die Stundenkreise aller Gestirne treten periodisch durch den oberen und unteren Meridian; die Werthe ihrer Stundenwinkel ändern sich continuirlich, und hierauf gründet sich die Möglichkeit der Zeitmessung mittels der Gestirne.

So lange die Himmelspole als unveränderlich in ihrer Lage auf der ruhenden Himmelskugel angesehen werden dürfen, d. h. so lange die Richtung der Erdaxe uns unverändert erscheint, so lange bleiben die Abstände der Pole von den Fixsternen unverändert bei der Drehung. Die Fixsterne beschreiben deshalb auf der ruhenden Himmelskugel Kreise, deren Ebenen parallel der Aequatorebene sind; sie heifsen *Parallelkreise* oder *Sternparallele.*

Ist S ein Stern, so soll S_μ den Schnittpunkt seines Parallels mit dem *oberen* Meridian bedeuten; S_ν den mit dem *unteren*

Meridian; S_ε den mit dem *Stundenkreis des Ostpunktes;* S_ω den mit dem *Stundenkreis des Westpunktes.*

Diese vier Punkte zerlegen den Sternparallel in vier Quadranten. Der Punkt S_μ heifst die *obere Culmination* (O. C.), der Punkt S_ν die *untere Culmination* (U. C.) des Sterns.

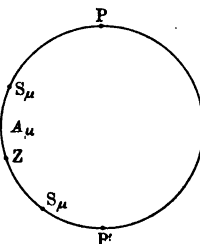
Ist Z das Zenit, so setzen wir $\widehat{ZS_\mu} = \zeta_\mu$, $\widehat{ZS_\nu} = \zeta_\nu$; es sind also ζ_μ und ζ_ν die Zenitdistanzen der O. C. und der U. C. Geometrisch folgt, dafs von allen Zenitdistanzen z, welche der Stern beim Durchlaufen seines Parallels annehmen kann, ζ_μ die *kleinste*, ζ_ν die *gröfste Zenitdistanz* ist. Der Stern hat also im oberen (unteren) Meridian seine gröfste (kleinste) Höhe, und dadurch rechtfertigt sich der Name: obere (untere) Culmination.

Polhöhe und obere Culminationen.

88. Es besteht eine sehr einfache Beziehung zwischen der geographischen Breite φ des gegebenen Zenits, der Declination δ des Sterns und der Zenitdistanz ζ_μ seiner oberen Culmination. Ist nämlich P der Nordpol, P' der Südpol, Z das Zenit, so ist stets:

$$\widehat{PS_\mu} = 90^0 - \delta, \quad PZ = 90^0 - \varphi.$$

Fig. 23.



Liegt S_μ auf dem Bogen $\widehat{ZP}$ (Fig. 23), also auf dem Vertical des Nordpols, so heifst die Culmination *nördlich*, und es ist:

$$\widehat{PZ} - \widehat{PS_\mu} = \widehat{ZS_\mu},$$

d. h.:

$$(90^0 - \varphi) - (90^0 - \delta) = \zeta_\mu,$$

oder:

$$\delta - \varphi = \zeta_\mu, \quad \varphi = \delta - \zeta_\mu.$$

Liegt S_μ auf dem Bogen $\widehat{ZP'}$, also auf dem Vertical des Südpols, so heifst die Culmination *südlich*, und es ist:

$$\widehat{PS_\mu} - \widehat{PZ} = ZS_\mu,$$

d. h.:

$$(90^0 - \delta) - (90^0 - \varphi) = \zeta_\mu,$$

oder:

$$\varphi - \delta = \zeta_\mu, \quad \varphi = \delta + \zeta_\mu.$$

Die Gleichungen:

$$\varphi = \delta - \zeta_\mu \text{ (wenn } \delta > \varphi)$$
$$\varphi = \delta + \zeta_\mu \text{ (wenn } \delta < \varphi)$$

liefern demnach die Möglichkeit, φ aus δ und ζ_μ zu bestimmen, wenn δ bereits bekannt und ζ_μ durch Messung ermittelt ist.

Von den verschiedenen Lageverhältnissen eines Sternparallels zu einem Horizont.

89. Hat ein Stern S die Declination δ, und hat das Zenit Z eines Horizonts die geographische Breite φ, so können für die numerischen Werthe (δ) und (φ) von δ und φ folgende Fälle eintreten:

$$(\varphi) + (\delta) > 90^0, \quad (\varphi) + (\delta) = 90^0, \quad (\varphi) + (\delta) < 90^0.$$

Ferner kann, je nachdem $\varphi = +(\varphi)$ oder $= -(\varphi)$, $\delta = +(\delta)$ oder $= -(\delta)$ ist, das *Vorzeichen* von $\varphi\,\delta$ *plus oder minus* sein.

Dies ergibt sechs verschiedene Fälle, deren Discussion eine erhöhte Wichtigkeit erhält, wenn die Sonne (☉) betrachtet wird. Ihre Declination ist veränderlich, so daſs sie zu verschiedenen Zeiten ein *verschiedenes* Verhalten gegen *denselben* Horizont zeigt. Der Nützlichkeit wegen sei zuvor an folgende Sätze aus der Geometrie der Kugel (Sphärik) erinnert:

90. *Zwei Hauptkreise halbiren sich stets, zwei Nebenkreise nie. Ein Nebenkreis wird durch einen Hauptkreis halbirt, wenn ihre Ebenen normal liegen.* Beispielsweise werden alle Sternparallele durch jeden Meridian halbirt, desgleichen durch die Horizonte aller Aequatorzenite.

Ein *Hauptkreis* wird *von einem Nebenkreis entweder in zwei Punkten geschnitten*, oder *in einem Punkte berührt*, oder *gar nicht geschnitten*, und wir werden sehen, daſs in Bezug auf Horizont und Sternparallele diese drei Fälle eintreten, je nachdem $(\varphi) + (\delta) < 90^0$, $= 90^0$, $> 90^0$ ist.

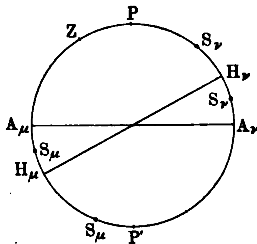
Ein Hauptkreis zerfällt die Kugel in zwei gleiche Theile: *Halbkugeln;* ein Nebenkreis k liefert zwei ungleiche Theile. Der kleinere Theil, welcher gleichzeitig Theil einer Halbkugel ist, soll eine *Kugelcalotte* genannt werden. Der Kugelradius, welcher durch den Mittelpunkt des Kreises k geht, trifft die Calotte in einem Punkte P, welcher der *Scheitel der Calotte* und auch *der sphärische Mittelpunkt von* k heiſst. Kreis k heiſst die *Basis oder der Grundkreis der Calotte;* seine Punkte haben gleichen sphärischen Abstand von P, und jeder Bogen zwischen P und einem Punkte von k heiſst ein *sphärischer Radius von* k. Das zwischen zwei Parallelkreisen liegende Kugelstück heiſst eine *Kugelzone.*

Gegenpunkte der Kugel sind Endpunkte desselben Durchmessers. Ein Hauptkreis wird also durch seine Gegenpunkte von Neuem erzeugt. Ein Nebenkreis k erzeugt durch seine Gegenpunkte den *Gegenkreis* k'. Die Kreise k und k' sind *parallel und congruent*; ihre Calotten heifsen *Gegencalotten;* die Punkte derselben sind *paarweise Gegenpunkte.* Schneidet, bezw. berührt ein Hauptkreis den *einen der Nebenkreise* in zwei Punkten, bezw. in *einem* Punkte, so schneidet, bezw. berührt er den *Gegenkreis* in den *Gegenpunkten.*

Durch zwei Gegenkreise wird die Kugel in zwei Calotten und eine Zone zerfällt; letztere wird durch den parallelen Hauptkreis in zwei Theile zerlegt, deren Punkte paarweise Gegenpunkte sind. Durch jeden Punkt S der *Zone* lassen sich zwei Hauptkreise legen, welche den Kreis k *berühren*, also auch den Gegenkreis k'. Die beiden Berührungskreise liegen *symmetrisch* in Bezug auf den durch den Punkt S und die Calottenscheitel bestimmten Kreis (Nr. 95, Anfang).

91. Die Zenitdistanzen aller Horizontpunkte sind $= 90^0$. Die Halbkugel, deren Scheitel das Zenit ist, heifst die *sichtbare Halbkugel;* die Zenitdistanzen ihrer Punkte sind $< 90^0$; letztere liegen *über* dem Horizont und sind *sichtbar.* Die andere Halbkugel heifst die *unsichtbare* Halbkugel; die Zenitdistanzen ihrer Punkte sind $> 90^0$; letztere liegen *unter* dem Horizont und sind *unsichtbar*, weil die Visirstrahlen zu ihnen die Erde treffen.

Fig. 24.



Es sei P (Fig. 24) der auf der *sichtbaren* Halbkugel gelegene Himmelspol, Z das Zenit; A_μ und A_ν, bezw. H_μ und H_ν, seien die Schnittpunkte des Aequators, bezw. Horizontes, mit dem oberen und unteren Meridian (Nr. 74).

Von einem Sternparallel wissen wir, dafs die Zenitdistanzen z seiner Punkte zwischen ζ_μ und ζ_ν liegen, den Zenitdistanzen der oberen Culmination O. C. und der unteren U. C.; die Punkte wurden S_μ und S_ν genannt (Nr. 87, Ende).

Liegt S_ν auf Bogen $\widehat{PH_\nu}$, so liegt S_ν auf der sichtbaren Halbkugel, d. h. es ist $\zeta_\nu < 90^0$; also sind *alle* Zenitdistanzen des Sterns $< 90^0$, und der Sternparallel *verläuft ganz und gar* auf der

sichtbaren Halbkugel. Ferner ist $\varphi\,\delta$ *plus*, denn es liegen S_ν und Z auf *derselben* Aequatorseite. (δ) ist der Aequatorabstand von S_ν, (φ) derjenige von Z, also: $\widehat{S_\nu A_\nu} = (\delta)$, $\widehat{H_\nu A_\nu} = 90^0 - (\varphi)$ $\widehat{S_\nu A_\nu} > \widehat{H_\nu A_\nu}$, $(\delta) > 90^0 - (\varphi)$, $(\varphi) + (\delta) > 90^0$.

Fällt S_ν mit H_ν zusammen, so findet die U. C. von S in H_ν statt, d. h. im Horizont; der *Parallel liegt also auf der sichtbaren Halbkugel* und *berührt* den Horizont. In diesem Falle wird $(\delta) = 90^0 - (\varphi)$, d. h. $(\varphi) + (\delta) = 90^0$, während $\varphi\,\delta$ *plus* bleibt.

Liegt S_μ (Fig. 24) auf dem Bogen $\widehat{P'H_\mu}$, so ist $\varphi\,\delta$ *minus* und die *obere Culmination* liegt auf *der unsichtbaren Halbkugel*; alle Zenitdistanzen des Sterns sind also $> 90^0$, denn seine *kleinste* ist bereits $> 90^0$. *Der Sternparallel liegt also ganz und gar auf der unsichtbaren Halbkugel.*

Da $\widehat{A_\mu S_\mu} = (\delta)$, $\widehat{A_\mu H_\mu} = 90^0 - (\varphi)$, $\widehat{A_\mu S_\mu} > \widehat{A_\mu H_\mu}$, so folgt $(\delta) > 90^0 - (\varphi)$, d. h. $(\varphi) + (\delta) > 90^0$.

Fällt S_μ mit H_μ zusammen, so findet die O. C. von S in H_μ statt, d. h. im Horizont. *Der Parallel liegt also auf der unsichtbaren Halbkugel und berührt den Horizont* in der O. C. In diesem Falle wird $(\delta) = 90^0 - (\varphi)$, d. h. $(\varphi) + (\delta) = 90^0$, während $\varphi\,\delta$ *minus* bleibt.

Wenn S_ν auf Bogen $\widehat{A_\nu H_\nu}$ liegt, so liegt S_ν auf der unsichtbaren, das zugehörige S_μ auf der sichtbaren Halbkugel. S_μ (nicht vermerkt in Fig. 24) liegt auf $\widehat{PA_\mu}$, und es ist $\widehat{S_\mu A_\mu} = \widehat{S_\nu A_\nu} = (\delta)$. Also ist $\zeta_\nu > 90^0$, $\zeta_\mu < 90^0$. Bewegt sich der Stern auf der Osthälfte des Meridians, so vermindern sich seine Zenitdistanzen von ζ_ν auf ζ_μ, d. h. sie werden kleiner und treten durch 90^0. Für die Westhälfte wachsen die Zenitdistanzen von ζ_μ auf ζ_ν und treten gleichfalls durch 90^0. *Der Sternparallel schneidet also den Horizont in zwei Punkten.*

Der östliche Schnittpunkt werde mit A (Aufgang), der westliche Schnittpunkt mit U (Untergang) bezeichnet.

Da $\widehat{A_\nu S_\nu} = (\delta)$, $\widehat{A_\nu H_\nu} = 90^0 - (\varphi)$, $\widehat{A_\nu S_\nu} < \widehat{A_\nu H_\nu}$, so folgt: $(\delta) < 90^0 - (\varphi)$, d. h. $(\varphi) + (\delta) < 90^0$; gleichzeitig ist $\varphi\,\delta$ *plus.*

Liegt S_μ auf Bogen $\widehat{A_\mu H_\mu}$, so liegt S_μ auf der sichtbaren Halbkugel, das zugehörige S_ν auf dem unsichtbaren Quadranten $\widehat{P'A_\nu}$. Also ist $\zeta_\mu < 90^0$, $\zeta_\nu > 90^0$, und es gibt, wie im vorigen Falle, *zwei Schnittpunkte A und U mit dem Horizont.*

Da $\widehat{A_\mu S_\mu} = (\delta)$, $\widehat{A_\mu H_\mu} = 90^0 - (\varphi)$, $\widehat{A_\mu S_\mu} < \widehat{A_\mu H_\mu}$, so folgt: $(\delta) < 90^0 - (\varphi)$, d. h. $(\varphi) + (\delta) < 90^0$; gleichzeitig ist $\varphi\,\delta$ *minus*. Es ist also $(\varphi) + (\delta) < 90^0$ die zureichende Bedingung dafür, *dafs Sternparallel und Horizont sich schneiden.*

Gestirne, deren (δ) dieser Bedingung genügt, heifsen *Auf- und Untergangsterne* (A U-Sterne); sie werden aber ein verschiedenes Verhalten gegen die sichtbare und unsichtbare Halbkugel zeigen, *je nachdem* $\varphi\,\delta$ *plus oder minus ist.*

In beiden Fällen müssen die *Punkte A und U symmetrisch liegen in Bezug auf die Meridianebene.* Denn letztere ist sowohl für den Horizont wie für den Sternparallel eine Symmetrie-Ebene, also auch für deren Schnittpunkte A und U.

Es ist deshalb (s. die Figuren auf S. 116):

$$\widehat{AH_\nu} = \widehat{UH_\nu}, \quad \widehat{AH_\mu} = \widehat{UH_\mu},$$
$$\widehat{AS_\nu} = \widehat{US_\nu}, \quad \widehat{AS_\mu} = \widehat{US_\mu}.$$

Für die Punkte des Bogens $\widehat{AS_\mu U}$ (Fig. 26, 28) ist $z < 90^0$. Er heifst der *Tagbogen des Parallels*, und der Stern ist *sichtbar*, so lange er dem Tagbogen angehört. Für die Punkte des Bogens $\widehat{US_\nu A}$ (Fig. 25, 27) ist $z > 90^0$. Er heifst der *Nachtbogen des Parallels*, und der Stern ist *unsichtbar*, so lange er dem Nachtbogen angehört.

Da die Ost-Westpunkte $E\,W$ die Schnittpunkte von Aequator und Horizont sind, so liegen die beiden, durch das Punktpaar $E\,W$ bestimmten Halbkreise des Horizonts auf *entgegengesetzten Aequatorhalbkugeln.* Die Mitte des einen Halbkreises ist H_ν, die des anderen ist H_μ. Weil H_ν und Z stets auf *derselben* Seite des Aequators liegen (Fig. 24, S. 113), so liegt der Halbkreis $\widehat{WH_\nu E}$ des Horizonts auf *derselben* Aequatorhalbkugel wie Z; der Halbkreis $\widehat{WH_\mu E}$ also auf der *entgegengesetzten.*

Liegt der Sternparallel mit Z auf *derselben* Aequatorhalbkugel, so ist $\varphi\,\delta$ *plus*, und es müssen seine Schnittpunkte $A\,U$ mit dem Horizont auf Halbkreis $\widehat{WH_\nu E}$ liegen. Der Bogen $\widehat{UH_\nu A}$ ist also *kleiner* als ein Horizonthalbkreis, und hieraus folgt mit Hilfe der Stundenkreise $\widehat{PAP'}$ und $\widehat{PUP'}$, dafs *Bogen* $\widehat{US_\nu A}$ *kleiner als ein Halbkreis des Sternparallels* ist.

Analog folgt: liegt der Sternparallel mit Z und dem sichtbaren Pol auf *entgegengesetzten* Aequatorhalbkugeln, so ist $\varphi\,\delta$ *minus*; er schneidet alsdann den Halbkreis $\widehat{E H_\mu W}$ des Horizonts, und es wird Bogen $\widehat{A H_\mu U}$ kleiner als ein Horizonthalbkreis und Bogen $\widehat{A S_\mu U}$ kleiner als ein Halbkreis des Sternparallels.

Also ergibt sich als Resultat: *Für $\varphi\,\delta$ plus ist der Nachtbogen des Sternparallels kleiner als der Tagbogen; für $\varphi\,\delta$ minus ist der Tagbogen kleiner als der Nachtbogen.*

Die Gestirne, für welche $\varphi\,\delta$ *plus*, $(\varphi) + (\delta) < 90^0$ ist, sollen *gleichstimmige A U-Sterne* heifsen; diejenigen, für welche $\varphi\,\delta$ *minus*, $(\varphi) + (\delta) < 90^0$ ist, sollen *ungleichstimmige A U-Sterne* heifsen.

Die Fig. 25 bis 28 geben die vier möglichen Fälle, welche eintreten können. P bedeutet stets den Nordpol, P' den Südpol.

Fig. 25.

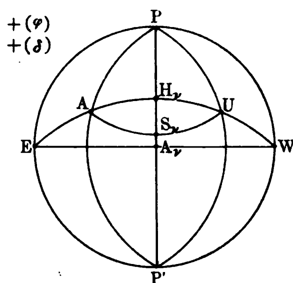
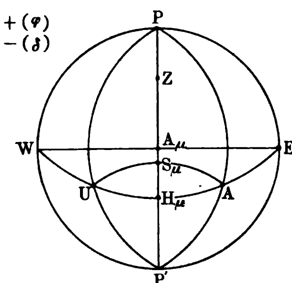


Fig. 26.



Jede Zeichnung liegt auf einer Halbkugel des Sechsstundenkreises, welcher durch die Himmelspole und die Ost-Westpunkte $E\,W$

Fig. 27.

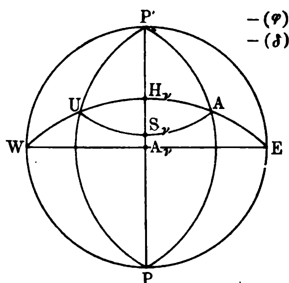
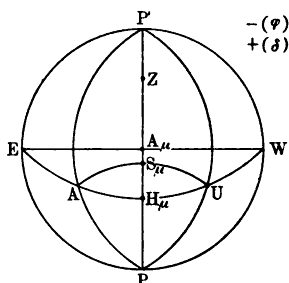


Fig. 28.



des Horizontes geht. Der Scheitel der Halbkugel ist entweder A_ν oder A_μ. Aequator- und Meridianhalbkreise erscheinen als geradlinige Strecken.

In Fig. 25 ist das Zenit (nicht sichtbar) ein nördliches, der Stern ein nördlicher, in Fig. 26 ist das Zenit (sichtbar) ein nördliches, der Stern ein südlicher, in Fig. 27 ist das Zenit (nicht sichtbar) ein südliches, der Stern ein südlicher, in Fig. 28 ist das Zenit (sichtbar) ein südliches, der Stern ein nördlicher. Da das Zenit Z stets auf dem oberen Meridian $\widehat{PA_\mu P'}$ liegt, so liegt es nur für den Fall der Ungleichstimmigkeit (Fig. 26 und 28) auf der Halbkugel der Zeichnung.

Zum Verständnifs der Zeichnungen wird noch einmal an Folgendes erinnert: a) Die *Drehung der Himmelskugel* erscheint, vom *Nordpol* aus betrachtet, als *Rechtsdrehung;* vom *Südpol* aus als *Linksdrehung.* b) Die *Osthälfte* der Himmelskugel wird beschrieben, wenn der Stundenkreis eines Sternes *aus dem unteren in den oberen Meridian* gedreht wird; die *Westhälfte* wird bei der Drehung *aus dem oberen in den unteren Meridian* beschrieben.

92. *Zusammenstellung der vorstehend abgeleiteten Resultate:*

a) Ein Gestirn, für welches $\varphi\,\delta$ plus, $(\varphi) + (\delta) > 90^0$ ist, soll ein *Circumpolarstern* oder *Cp*-Stern heifsen; sein Parallel liegt auf der sichtbaren Halbkugel; *es geht nie unter.*

b) Ein Gestirn, für welches $\varphi\,\delta$ plus, $(\varphi) + (\delta) = 90^0$ ist, soll ein *berührender Circumpolarstern* oder U. C. - Stern heifsen; sein Parallel liegt auf der sichtbaren Halbkugel, *es geht nicht unter, aber die U. C.* (untere Culmination) *fällt in den Horizont.*

c) Ein Gestirn, für welches $\varphi\,\delta$ plus, $(\varphi) + (\delta) < 90^0$ ist, soll ein *gleichstimmiger Auf- und Untergangsstern* oder *A U-Stern* heifsen; *er geht auf und unter*, sein Tagbogen ist *gröfser* als der Nachtbogen.

d) Ein Gestirn, für welches $\varphi\,\delta$ minus, $(\varphi) + (\delta) < 90^0$ ist, soll ein *ungleichstimmiger A U-Stern* heifsen; *es geht auf und unter*; sein Tagbogen ist *kleiner* als sein Nachtbogen.

e) Ein Gestirn, für welches $\varphi\,\delta$ minus, $(\varphi) + (\delta) = 90^0$ ist, soll ein *unsichtbarer O. C.-Stern* heifsen; sein Parallel liegt auf der unsichtbaren Halbkugel; *es geht nie auf, aber seine O. C.* (obere Culmination) *fällt in den Horizont.*

f) Ein Gestirn, für welches $\varphi\,\delta$ minus, $(\varphi) + (\delta) > 90^0$ ist, soll ein *unsichtbarer Stern oder Un-Stern* heifsen; sein Parallel liegt auf der unsichtbaren Halbkugel; *es geht nie auf.*

Circumpolarsterne zur Bestimmung der Polhöhe.

93. Ist die untere Culmination S_ν sichtbar (Fig. 29), so liefert die Werthsumme der Bogen $\widehat{A_\mu Z}$, $\widehat{ZS_\nu}$, $\widehat{S_\nu A_\nu}$ den Werth 180° des halben Meridiankreises $A_\mu P A_\nu$, wo P den sichtbaren Pol des Zenits bedeutet.

Es ist:

$$\widehat{A_\mu Z} = (\varphi),\quad \widehat{ZS_\nu} = \zeta_\nu,\quad \widehat{S_\nu A_\nu} = (\delta),$$

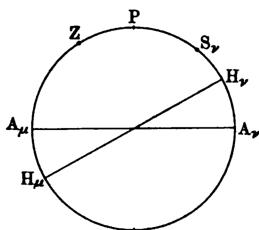
also:

$$180^0 = (\varphi) + \zeta_\nu + (\delta),$$

oder:

$$\text{a.}\quad (\varphi) = 180^0 - (\delta) - \zeta_\nu.$$

Fig. 29.



Mittels dieser Formel kann man (φ) aus der unteren Culmination ableiten, wenn δ gegeben und ζ_ν durch Messung gefunden ist. Es wird alsdann:

$$\varphi = +(\varphi),\ \text{wenn}\ \delta = +(\delta)\ \text{ist},$$
$$\varphi = -(\varphi),\ \text{wenn}\ \delta = -(\delta)\ \text{ist}.$$

Für ein nördliches Zenit ist die sichtbare U. C. stets nördlich, für ein südliches Zenit ist die sichtbare U. C. stets südlich. Dagegen kann, sobald Z dem sichtbaren Pol näher liegt als dem Aequator, die O. C. auf der Seite des Aequators stattfinden; nämlich wenn $(\varphi) > (\delta) > 90^0 - (\varphi)$ ist. Die vier möglichen Fälle sind:

Nördliche Hemisphäre.

O. C. nördlich: $\zeta_\mu = \delta - \varphi$
U. C. nördlich: $\zeta_\nu = 180^0 - \varphi - \delta$

$$\text{b.}\quad \varphi = 90^0 - \frac{1}{2}(\zeta_\nu + \zeta_\mu).$$

O. C. südlich: $\zeta_\mu = \varphi - \delta$
U. C. nördlich: $\zeta_\nu = 180^0 - \varphi - \delta$

$$\text{c.}\quad \varphi = 90^0 - \frac{1}{2}(\zeta_\nu - \zeta_\mu).$$

Südliche Hemisphäre.

O. C. nördlich: $\zeta_\mu = \delta - \varphi$
U. C. südlich: $\zeta_\nu = 180^0 + \varphi + \delta$

d. $\varphi = \frac{1}{2}(\zeta_\nu - \zeta_\mu) - 90^0.$

O. C. südlich: $\zeta_\mu = \varphi - \delta$
U. C. südlich: $\zeta_\nu = 180^0 + \varphi + \delta$

e. $\varphi = \frac{1}{2}(\zeta_\nu + \zeta_\mu) - 90^0.$

Die Bestimmung von φ durch beide Culminationen eines Circumpolarsterns ist also unabhängig von der Declination desselben. Es bedarf daher nicht der Kenntnifs von δ für die Polhöhebestimmung mittels dieser Methode.

Von dem Verhalten eines Sternparallels δ gegen die Verticalkreise eines Zenites φ.

94. Es sei gegeben ein Zenit Z der geographischen Breite φ auf der Calotte des Parallels von der Declination δ. Alsdann ist:

$$\varphi\,\delta \text{ plus und } (\varphi) > (\delta).$$

Auf der Aequatorhalbkugel (Fig. 30) mit dem Scheitel P soll Z zunächst ein nördliches Zenit bedeuten, also P den nördlichen Himmelspol. Für den Aequator $A_\mu W A_\nu E$ bedeuten E und W die Ost-Westpunkte, A_μ und A_ν die Punkte des oberen und unteren Meridians. $\widehat{ZE}$ und $\widehat{ZW}$ sind Quadranten des I. Verticals (Nr. 75), $\widehat{PA_\mu}$ und $\widehat{PA_\nu}$ Quadranten des oberen und unteren Meridians. Der I. Vertical mufs den Sternparallel $S_\mu S_\omega S_\nu S_\varepsilon$ schneiden, und zwar liegt der Schnittpunkt V_ε auf dem östlichen Quadranten $\widehat{ZE}$, der andere, V_ω, auf dem westlichen Quadranten $\widehat{ZW}$.

V_ε und V_ω liegen symmetrisch in Bezug auf die Meridianebene von Z; und es ist $z = \widehat{ZV_\varepsilon} = \widehat{ZV_\omega}$. z ist $< 90^0$, weil die Bogen Theile der Quadranten $\widehat{ZE}$, $\widehat{ZW}$ sind; die Durchtritte des Sterns durch den I. Vertical sind also stets sichtbar. Da der I. Vertical den Gegenparallel $-\delta$ in den Gegenpunkten von V_ε und V_ω schneidet, so folgt, dafs deren Zenitdistanzen $= 180^0 - z$, d. h. $> 90^0$, dafs also diese Gegenpunkte unsichtbar sind.

Der vom oberen Meridian halbirte sphärische Winkel der Stundenkreise V_ε und V_ω ist ein Theil des gestreckten Winkels $WPE = 180^0$, d. h. die Abstände der Stundenkreise V_ε und V_ω vom oberen Meridian sind $< 90^0$.

Weil der I. Vertical normal zum Meridian liegt, so ist der Abstand des Verticals ZV_ε vom Vertical des Südpols $= 90^0$. Gleiches gilt für den Vertical ZV_ω. Da P den Nordpol bedeutet, so liegt A_μ auf dem Vertical des Südpols.

Fig. 30.

Soll in der Fig. 30 P den Südpol, Z ein südliches Zenit bedeuten, so müssen E und W, sowie die Indices ε und ω vertauscht werden. In diesem Falle liegt A_ν auf dem Vertical des Südpols.

Es ist also $\varphi\,\delta$ plus, $(\varphi) > (\delta)$, die Bedingung dafür, dafs Stern δ den I. Vertical schneidet, und dafs die Durchtritte sichtbar sind.

95. Fig. 31 stellt den Fall dar, wo Z nicht auf der Calotte des Parallels liegt, sondern auf der Zone zwischen letzterem und dem Aequator. Es ist nunmehr: $\varphi\,\delta$ plus und $(\varphi) < (\delta)$.

Fig. 31.

Geometrisch ist leicht einzusehen, dafs der Hauptkreis δ_ε, dessen Ebene durch die Tangente des Parallels δ im Punkte S_ε geht. die Punkte $A_\mu A_\nu$ des Aequators enthält, und dafs dieser Kreis den Sternparallel berührt. Der durch Z gehende Breiteparallel φ schneide den Hauptkreis δ_ε in Q und den Quadranten $\widehat{PE}$ in R; ferner sei $\widehat{RT} = \widehat{ZQ}$. Der Bogen $\widehat{PT}$ schneide den Sternparallel in D_ε. Alsdann berührt der Vertical ZD_ε den Sternparallel im

Punkte D_ε, d. h. er ist ein durch Z gelegter Berührungskreis des Parallels. Der symmetrisch zu D_ε in Bezug auf die Meridianebene gelegene Punkt D_ω ist der Berührungspunkt des Kreises δ_ω (nicht vermerkt), welcher zu dem ersten Berührungskreise δ_ε symmetrisch liegt in Bezug auf den Meridian.

Der angegebenen Construction liegt folgende Ueberlegung zu Grunde. Denkt man sich den Halbkreis $\widehat{A_\nu S_\varepsilon A_\mu}$ und den Bogen $\widehat{PS_\varepsilon R}$ um P drehbar, so wird der Halbkreis in jeder Lage den Parallel berühren. Ist Bogen $\widehat{PR}$ nach $\widehat{PT}$ gedreht, so fällt der Berührungspunkt S_ε nach D_ε, der Punkt Q des Berührungskreises in den Punkt Z. Es hat also Bogen $\widehat{QS_\varepsilon}$ nach der Drehung die Lage ZD_ε, und damit ist die Lage eines durch Z legbaren Kreises, welcher den Parallel berührt, gegeben.

Die beiden berührenden Verticalkreise ZD_ε und ZD_ω heifsen die *Kreise der gröfsten Digression* in Bezug auf Z, und D_ε, D_ω heifsen die *Digressionspunkte.* Ihre Zenitabstände sind $< 90^0$, weil $z = \widehat{ZD_\varepsilon} = \widehat{QS_\varepsilon}$ und $\widehat{QS_\varepsilon}$ Theil des Quadranten $\widehat{A_\mu S_\varepsilon}$ ist. Also sind die Digressionspunkte des Gegenparallels unsichtbar. Der Abstand des Stundenkreises eines Digressionspunktes vom oberen Meridian ist stets $< 90^0$, weil D_ε auf dem Quadranten $\widehat{S_\mu S_\varepsilon}$ und D_ω auf dem Quadranten $\widehat{S_\mu S_\omega}$ des Parallels liegt.

Der Abstand, welchen der Vertical jedes Digressionspunktes vom Vertical des sichtbaren Himmelspoles besitzt, ist $< 90^0$ und zugleich gröfser als der Abstand irgend eines Verticals, welcher den Sternparallel schneidet. Da der I. Vertical von Z normal zum Meridian liegt, so kann er den Parallel nicht schneiden; er ist in der Figur durch Halbkreis $\widehat{EZW}$ dargestellt.

Die beiden Digressionskreise bestimmen einen sphärischen Concavwinkel, in welchem der Sternparallel so verläuft, dafs er von beiden sphärischen Schenkeln berührt wird. Ist Z ein nördliches Zenit, so wird der Winkel von dem Vertical des Nordpols halbirt. Bedeutet α den Abstand jedes Digressionskreises von diesem Vertical, so ist $180^0 - \alpha$ das Azimut (Nr. 86) des westlichen und $180^0 + \alpha$ das Azimut des östlichen Digressionskreises. Die Azimute aller Punkte des Parallels liegen also zwischen $180^0 - \alpha$ und $180^0 + \alpha$.

Ist Z ein südliches Zenit, so wird der Concavwinkel von dem

Vertical des Südpols halbirt. Der westliche Digressionskreis hat das Azimut α, wenn α den Abstand jedes Digressionskreises von diesem Vertical bedeutet, und der östliche Digressionskreis hat das Azimut $360^0 - \alpha$. Folglich liegen die Azimute der westlichen Punkte des Parallels zwischen 0 und α, diejenigen der östlichen Punkte zwischen $360^0 - \alpha$ und 360^0.

Wir haben erkannt:

Ist $\varphi\,\delta$ *plus*, $(\varphi) < (\delta)$, *so wird der Parallel von zwei Verticalkreisen in den Digressionspunkten berührt; die Verticalkreise aller Punkte des Parallels verlaufen* **innerhalb** *des Concavwinkels der berührenden Digressionskreise; der Stern ist in beiden Digressionspunkten sichtbar; sein Parallel wird von dem I. Vertical* **nicht** *geschnitten.*

Die beiden Fälle $(\varphi) \gtrless (\delta)$, $\varphi\,\delta$ plus, verschmelzen mit einander, wenn $(\varphi) = (\delta)$ wird. Alsdann fallen die beiden Schnittpunkte V_ε, V_ω des I. Verticals mit Z zusammen, in welchem Punkte der Sternparallel von dem I. Vertical berührt wird. Die beiden Digressionskreise werden Gegenhalbkreise des letzteren.

Vierter Abschnitt.

Zeit und Zeitmessung.

---

96. *Zeit, Zeitintervall, Zeitpunkt* sind Erfahrungsbegriffe. Wir operiren mit ihnen, ohne sie definiren zu können, und auf sie findet das Wort Anwendung: „so lange Du mich fragst, weifs ich es nicht; so lange Du mich nicht fragst, weifs ich es.“

Das Bewufstsein unserer selbst, das „Ich“-Gefühl, liefert uns den Begriff der *Gegenwart.* Unser *Erinnerungsvermögen* gibt uns die Vorstellung von Gegenwarten, welche wir erlebt haben, und deren Gesammtheit wir *„Vergangenheit“* nennen. So entsteht vor unserer inneren Anschauung das Bild einer fliefsenden Folge von Gegenwarten, und hieraus abstrahiren wir den Begriff der *Zeit.* Einen beliebigen Abschnitt derselben nennen wir *Zeitintervall,* seine beiden Grenzen *Zeitpunkte.*

Jedes *Zeitintervall* ist für unsere Vorstellung in jede vorgeschriebene Anzahl von Identitäten zerfällbar, ist also *eine mathematische Gröfse* (Nr. 28, S. 35). Liegen die Grenzpunkte eines Zeitintervalls so nahe an einander, dafs wir sie als dieselbe Gegenwart empfinden, so heifst das Intervall ein *Zeitelement.* Es ist das, was wir im gewöhnlichen Leben als „Augenblick“ oder „Moment“ bezeichnen.

Eine Folge von Zustandsveränderungen nennen wir einen *Vorgang.* Jeder endliche Vorgang spielt sich zwischen zwei Zeitpunkten ab, und wir sagen: *das zwischen ihnen gelegene Zeitintervall wird von dem Vorgang erfüllt.* Die Grenzpunkte des Intervalls heifsen *der Anfang und das Ende des Vorgangs.* Zwei

Vorgänge können durchaus heterogen sein und dennoch denselben Anfang und dasselbe Ende *gemein* besitzen. Alsdann erfüllen sie dasselbe Zeitintervall, haben also etwas *gemeinsam*, was *ganz unabhängig ist von der Qualität eines jeden Vorganges.* Dies ist ein *Analogon zu der Anzahl einer Gruppe von Dingen.* Zwei solcher Gruppen können aus den heterogensten Zählobjecten bestehen und doch ein Gemeinsames haben: die Anzahl.

Ist ein *Zeitintervall als Einheit* festgesetzt, so ordnet sich jedem *Vorgange* eine Zahl zu: der *Werth des von ihm erfüllten Zeitintervalls*; gerade so wie sich jeder *Gruppe* von Objecten eine Zahl zuordnet: die *Anzahl der Gruppe.*

97. Es handelt sich nun vor Allem darum, ein bestimmtes Zeitintervall als Einheit aufzustellen und zu zeigen, in welcher Weise ein beliebiges Zeitintervall mit der Einheit verglichen werden kann.

Unsere gebräuchliche Zeitmessung kommt dadurch zu Stande, dafs wir jedem Zeitintervall einen Winkel in der Weise zuordnen können, dafs *congruenten Zeitintervallen congruente Winkel* zugeordnet sind. Die *Zeitmessung wird dadurch auf die Messung von Kreisbogen reducirt* (Nr. 39). Hierzu dienen getheilte Kreise. Bei dem gebräuchlichsten Zeitmesser, der *Uhr*, heifst ein solcher Kreis das *Zifferblatt.*

Das Princip aller Zeitmessung lautet:

Durch identische Vorgänge werden identische Zeitintervalle erfüllt.

Hierbei werden unter *identischen Vorgängen* solche verstanden, welche sich nur durch ihre Lage im Raum, eventuell auch in der Zeit unterscheiden; und unter *identischen Zeitintervallen* solche, welche sich nur durch ihre Lage in der Zeit unterscheiden.

Die classische Vorrichtung zur Erzeugung identischer Vorgänge ist das *Pendel.* So lange ein Pendel bei unveränderter Pendellänge in gleichen Ausschlägen schwingt, liefert es durch die Folge seiner Doppelschwingungen (hin *und* her) eine Folge identischer Vorgänge.

Es ist also die Möglichkeit gegeben, aus einer oder mehreren Schwingungen eines Pendels eine Zeiteinheit abzuleiten. Wir würden sie definiren als das von a Schwingungen erfüllte Zeitintervall, wo a eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Von den gleichförmigen Bewegungen und Drehungen.

98. Es sei für die Punktschaar einer Geraden ein Coordinatensystem (Nr. 43.) mit Ursprung O gegeben. Ein Punkt P soll sich von O aus auf dem positiven Strahl so bewegen, dafs die Gleichung:

$$x = ct$$

stets erfüllt ist. Hierin bedeutet x die Coordinate von P in einem bestimmten Augenblick; t den Werth des Zeitintervalls, welches seit Beginn der Bewegung in O verflossen ist, und c eine beliebig gewählte, aber constant bleibende Zahl.

Befindet sich P am Ende des Zeitintervalls t' im Punkte P' $(= x')$, am Ende des Zeitintervalls t'' im Punkte P'' $(= x'')$, so ist:

$$x' = ct'$$
$$x'' = ct''$$
$$\overline{x'' - x' = c\,(t'' - t'),}$$
$$\frac{x'' - x'}{t'' - t'} = c.$$

$x'' - x' = \sigma$ ist die Länge der Strecke $\overline{P'P''}$ und $t'' - t' = \tau$ ist die Dauer des von der Bewegung des Punktes P längs der Strecke σ erfüllten Zeitintervalls. Die Gleichung

$$\frac{\sigma}{\tau} = c$$

sagt also aus: das Verhältnifs der Streckenlänge zu der Zeitdauer ihres Durchlaufens nach Mafsgabe der Bewegung $x = ct$ ist constant $= c$. Schreibt man $\sigma = c\tau$, so folgt: *in gleichen Zeiten werden gleiche Strecken durchlaufen.*

Eine solche Bewegung heifst geradlinig *gleichförmig;* die Zahl c heifst ihre *Geschwindigkeit.* Für $\tau = 1$ (Zeitintervall der Einheit) wird

$$\sigma = c,$$

d. h. die *Geschwindigkeit der Bewegung $x = ct$ ist gleich der in der Zeiteinheit durchlaufenen Strecke.*

99. Statt der Punktschaar einer Geraden können wir betrachten: die Punktschaar eines Kreises k, die Strahlenschaar eines Centrums C, die Halbkreisschaar zweier Pole AA', die Flügelschaar

einer Axe a. Für jedes dieser Gebilde soll ein Coordinatensystem festgesetzt werden (Nr. 44). Alsdann lassen sich die soeben an $x = ct$ angestellten Betrachtungen übertragen, wenn x darin die positive Coordinate bedeutet entweder eines in positiver cyklischer Bewegung begriffenen Punktes auf dem Kreise k, oder eines in positiver Drehung begriffenen Strahles um C, eines Halbkreises um die Pole AA', eines Flügels um die Axe a. Dagegen soll t den Werth des Zeitintervalls bedeuten, welches bei der cyklischen Bewegung, bezw. der Drehung aus dem Ursprung des Coordinatensystems in die Lage x verflossen ist.

Diese Bewegungen heifsen *gleichförmige cyklische Bewegungen eines Punktes* und *gleichförmige Drehungen eines Strahles*, *bezw. Halbkreises, Flügels.*

Wenn in der Gleichung

$$x = ct$$

der Bogenwerth, bezw. Winkelwerth x auf die *Einheit des Bogenmafses* bezogen ist, so heifst c die *Winkelgeschwindigkeit.*

Bezieht sich unsere Gleichung auf die cyklische gleichförmige Bewegung, und hat der Kreis den Radius r, so ist, für $t = 1$, $x = c$, d. h. in der Zeiteinheit legt der Punkt den Bogen c zurück. Dies ist die Länge des Bogens in der Einheit des Radius r; folglich ist die Länge des Bogens in der dem Radius r zu Grunde liegenden Streckeneinheit gleich rc.

Es ist also rc die *lineare oder Weggeschwindigkeit* des Punktes, wenn c *seine Winkelgeschwindigkeit* ist.

100. Bedeutet in der Gleichung $\frac{\sigma}{\tau} = c$ (Nr. 98) die Zahl σ den Werth des Winkels, welcher bei der gleichförmigen Drehung $x = ct$ während der Zeitdauer τ beschrieben wird, so sagt

$$\sigma = c\tau$$

aus, dafs *bei einer gleichförmigen Drehung in gleichen Zeiten gleiche Winkel beschrieben werden.*

Verfügt man also über eine gleichförmige Drehung eines Halbkreises oder Flügels, und ist man im Stande, in jedem Augenblicke den Abstand des rotirenden Elementes von einem festen Ursprungselement zu messen, so kann man auch Zeitintervalle messen. Würde man z. B. das Zeitintervall, in welchem, für die

gegebene gleichförmige Drehung, die *Winkeleinheit* beschrieben wird, als *Zeiteinheit* definiren, so würde der Abstand des rotirenden Elementes (Halbkreises oder Flügels) gleich der Zeitdauer sein, welche seit dem letzten Durchtritt des rotirenden Elementes durch das feste Element verflossen ist.

Die Natur selbst liefert uns eine *gleichförmige Drehung durch die Rotation der Erde.* Jeder Meridianflügel kann als ein Flügel betrachtet werden, welcher sich gleichförmig um die Erdaxe dreht. Auch sind wir im Stande, die dabei auftretenden Drehungswinkel nach dem Princip zugeordneter Bogen mittels conformer Einheiten zu messen. Mit anderen Worten: es steht uns eine einwandfreie Methode der Zeitmessung zu Gebote.

Bezeichnet man jede *zeitmessende Vorrichtung als Uhr*, so darf man die drehende Erde als die einzig richtig gehende Uhr bezeichnen. Ihr Zifferblatt ist freilich nicht so leicht abzulesen wie die Zifferblätter aus Menschenhand; vielmehr bedarf es dazu bestimmter Instrumente und Methoden, welche wir kennen lernen werden. Dieselben werden unter dem Namen *Zeitbestimmungen* zusammengefafst und bilden die Grundlage der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung.

Bestimmung des Zeitintervalls, in welchem die Erde eine Rotation vollführt.

101. Unter der Annahme, dafs die Richtung der Erdaxe constant bleibt, behalten die Pole der rotirenden Himmelskugel eine unveränderte Lage auf der ruhenden Himmelskugel. Coincidirt ein beliebiger Stern S in irgend einem Augenblick mit einem oberen Meridian M, d. h. culminirt S in Bezug auf M, so wird nach einer östlichen Erdrotation, d. h. nach einer scheinbaren westlichen Rotation der Himmelskugel, der Stern S zum zweiten Male culminiren. Die Annahme ist nicht in voller Schärfe richtig, wie sogleich gezeigt werden soll. Wir sagen deshalb einschränkend:

Das Zeitintervall zwischen zwei auf einander folgenden Culminationen desselben Sterns in Bezug auf denselben Meridian ist nicht absolut, aber nahezu gleich dem von einer Erdrotation erfüllten Zeitintervall.

102. Die Erdaxe erleidet in Wirklichkeit Aenderungen in ihrer Richtung. Es ist dies eine Folge sowohl der Anziehungen,

welche zwischen Erde-Sonne und Erde-Mond stattfinden, wie der Abplattung der Erde. Daraus resultirt eine westliche Drehung der Erdaxe um die Ekliptiknormale *e*. Der *e*-Flügel durch den *nördlichen Erdaxenstrahl* führt deshalb eine Rotation aus. Dieselbe ist nicht ganz gleichförmig; jedoch werden in Perioden von etwa $18^1/_2$ Jahren gleiche Winkel beschrieben.

Hieraus ergibt sich ein jährliches Mittel, welches die *mittlere Präcession* heifst. Auch die mittlere Präcession ist nicht absolut constant, sondern wächst jährlich um einen Betrag, welcher kleiner ist als $^1/_{4000}$ Bogensecunde (0″,0002442966). Im Jahre 1900 war die jährliche Präcession 50″,2479; der ♈ würde also einen Umlauf von 360° in etwa $\frac{(360.60.60)''}{50{,}2479''}$ Jahren $=$ 25792... Jahren beschreiben, wenn die Präcession constant $=$ 50″,2479 bliebe.

Da die Aequinoctialgerade die Normale der durch die Erdaxe und die Ekliptiknormale bestimmten Ebene ist, so beschreibt sie gleichfalls den Präcessionswinkel. Also rücken auch der ♈ und der ♎ jährlich um den Betrag der Präcession westlich auf der Ekliptik fort. Diese Bewegung heifst der *Rückgang* oder die *Präcession der Aequinoctien*. Die doppelte Bezeichnung ist damit zu erklären, dafs ein in cyklischer Bewegung begriffener Punkt sich von einem festen Punkte seiner Kreisbahn gleichzeitig entfernt und sich gleichzeitig demselben nähert, je nachdem man den wachsenden oder abnehmenden der beiden conjugirten Bogen betrachtet, in welche der Kreis durch das Punktpaar zerlegt wird.

In den verschiedenen Lagen, welche der, durch den nördlichen Erdaxenstrahl gelegte Flügel der Ekliptiknormale bei der westlichen Drehung annimmt, ist der Winkel der nördlichen Erdaxe und Ekliptiknormale stets gleich der Schiefe der Ekliptik. Dieser Winkel ε erfährt periodische Schwankungen innerhalb des oben gegebenen Zeitintervalls von etwa $18^1/_2$ Jahren; sein jährlicher Mittelwerth gibt den mittleren Werth der Ekliptikschiefe. Danach beschreibt der nördliche Himmelspol um den nördlichen Ekliptikpol eine kreisförmig wellige Curve. Der sphärische Radius des Kreises ist gleich dem mittleren Werth von ε. Von den Punkten dieses Kreises entfernt sich der Himmelspol allmählich um minimale Beträge (Maximum $<$ 10″) nach beiden Seiten der Kreislinie.

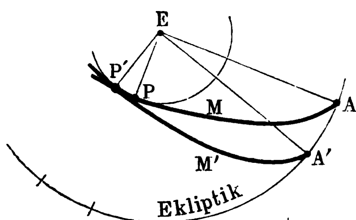
Die veränderliche Richtung der Erdaxe hat zur Folge, dafs das äquatoriale Coordinatensystem des ♈ (Nr. 78.) Lageveränderungen auf der Himmelskugel erfährt; also *ändern sich die Rectascensionen und Declinationen der Fixsterne mit der Zeit.*

103. Die scheinbare Bewegung der Gestirne wird nun durch die Präcessionsbewegung der Erdaxe in folgender Weise beeinflufst.

Sehen wir zunächst ab von der scheinbaren Drehung der gestirnten Himmelskugel und denken wir uns dieselbe in Ruhe, so führt jeder Meridian μ während einer Rotation um die Himmelspole eine doppelte Bewegung darauf aus.

Es sei (Fig. 32) E der Nordpol der Ekliptik, P der nördliche Himmelspol und Stundenkreis M die Lage von μ, für welche der ♈ in dem Augenblicke T culminirt.

Fig. 32.



Ist A die Lage des ♈ für den Zeitmoment T, so ist A gleichzeitig der Schnittpunkt von M mit der Ekliptik und der Pol des Kreises EP (Solstitialkolur). Nach Ablauf einer Rotation müfste μ wieder mit M zusammenfallen; aber wegen der Präcession erfahren P und alle Meridiane eine minimale westliche Drehung um E von etwa $0''14$ während der Rotation.

Es sei P' die Lage von P nach Ablauf der vom Zeitpunkt T an gerechneten Rotation. In der Zeichnung ist der Abstand beider Lagen aufserordentlich übertrieben. Wird die Figur EPA um E so gedreht, dafs EP nach EP' fällt, so entsteht die neue Lage $EP'A'$. Es ist nunmehr Stundenkreis M' die in Folge der Präcession veränderte Lage des Meridians μ nach Ablauf einer Erdrotation, und da A' der Pol von EP' ist, so ist A' der ♈. Folglich liegt letzterer wiederum in dem Meridian μ.

Also ist das Zeitintervall zwischen zwei aufeinander folgenden Culminationen des ♈ in Bezug auf einen beliebigen Meridian genau gleich dem Zeitintervall einer Erdrotation.

Die Figur lehrt ohne Weiteres, dafs ein Stern S, welcher gleichzeitig mit dem ♈ für Lage M des Meridians μ culminirt, nach einer Erdrotation *nicht genau* wieder auf *demselben Meridian*

liegen kann, weil der Stern in Ruhe geblieben ist, während μ aus Lage M in die Lage M' gerückt ist. Indessen kann der Unterschied, seiner minimalen Kleinheit wegen, durchaus bei unseren Betrachtungen vernachlässigt werden.

Mit Rücksicht darauf, dafs 366.2422 Erdrotationen während eines „tropischen Jahres" (Nr. 107.) stattfinden, erhält man das Resultat:

Die scheinbare Bewegung der Fixsterne erfolgt in der Weise, als befänden sich dieselben auf der westlich um die Pole rotirenden Himmelskugel, während der ekliptische Längenkreis jedes Fixsterns innerhalb jeder Rotation sich östlich um $\frac{50''25}{366.2422}$ *dreht.*

Die astronomischen Zeiteinheiten.

104. Die erste Zeiteinheit, welche uns von der Astronomie geliefert wird, ist das von einer Erdrotation erfüllte Zeitintervall. Dasselbe heifst ein *Sterntag* oder ein *Tag Sternzeit* (St. Z.). Abgekürzt soll ein Intervall von A Sterntagen durch A^d St. Z. bezeichnet werden. Der obere Index d soll anzeigen, dafs dem Werthe A die Einheit Tag, lateinisch dīēs, zu Grunde liegt. Der Sterntag eines Ortes beginnt, wenn der Stundenkreis des ♈ mit dem oberen Meridian des Ortes zusammenfällt, d. h. wenn der ♈ für den Ort culminirt; er endet mit der nächstfolgenden Culmination. Während dieser Zeit wächst der westliche Abstand des Stundenkreises ♈ vom oberen Meridian um 24 Winkelstunden.

Für den 24. Theil einer Rotation beträgt das Wachsthum eine sphärische Winkelstunde (Nr. 100.), und das hierfür erforderliche Zeitintervall heifst eine *Stunde Sternzeit* oder eine *Sternstunde* und gilt als zweite Einheit der Zeitmessung.

Für diese Einheit erhält also das Zeitintervall, in welchem der Stundenwinkel des ♈, identisch mit dem Sternzeitwinkel (Nr. 78.), um t sphärische Winkelstunden gewachsen ist, den Werth t.

Der 60. Theil der Sternstunde heifst Sternminute, der 60.60. Theil der Sternstunde heifst Sternsecunde. Zeitintervalle von B Stunden, C Minuten, D Secunden Sternzeit sollen bezeichnet werden durch B^h St. Z., C^m St. Z., D^s St. Z. Es ist also: 1^d St. Z. $= 24^h$ St. Z. $= 1440^m$ St. Z. $= 86\,400^s$ St. Z.

Das Zeitintervall zwischen einer O. C. (Nr. 87.) der ⊙ (Sonne) und der nächstfolgenden O. C. heifst ein *wahrer Sonnentag* des betrachteten Erdortes. Ist Z das Zenit des letzteren, so fällt der Stundenkreis von Z., d. h. der obere Meridian des Ortes, für den Moment der O. C., zusammen mit dem Stundenkreis ⊙; der östliche Abstand des oberen Meridians vom ♈ ist die Sternzeit ϑ; das Analoge für die ⊙ ist die $AR\,\alpha_\odot$, und es ist $\vartheta = \alpha_\odot$. Nach Ablauf eines Sterntages hat der obere Meridian wiederum den östlichen Abstand $\vartheta = \alpha_\odot$ vom ♈. Während dieses Zeitintervalls hat sich der Stundenkreis ⊙ um einen bestimmten Betrag $\varDelta\alpha_\odot$ östlich gedreht, weil die ⊙ auf der Ekliptik östlich fortschreitet; der Stundenkreis ⊙ hat also nunmehr den östlichen Abstand $\alpha_\odot + \varDelta\alpha_\odot$ vom ♈, folglich den östlichen Abstand $\varDelta\alpha_\odot$ vom oberen Meridian. Demnach steht die ⊙ noch *vor* ihrer zweiten Culmination, und der wahre Sonnentag wird erst zu Ende sein, wenn der Stundenkreis ⊙ den sphärischen Winkel $\varDelta\alpha_\odot$ beschrieben hat. *Um das hierfür benöthigte Zeitintervall mufs also der wahre Sonnentag länger sein als der Sterntag.* Da ferner $\varDelta\alpha_\odot$ nicht constant ist, so sind die *wahren Sonnentage von ungleicher Länge.*

105. Die ⊙ ist aus diesem Grunde nicht direct als zeitmessendes Gestirn zu verwenden. Denn *ein „Zeitgestirn" mufs die Bedingung erfüllen, dafs sein Stundenkreis eine gleichförmige Drehung* besitzt, weil nur dann gleichen Wachsthümern des Stundenwinkels gleiche Zeitintervalle entsprechen. Soll ein Gestirn mit veränderlicher AR die Eigenschaften eines *„Zeitgestirns"* besitzen, so mufs die *Aenderung seiner AR gleichförmig sein*, d. h. sein Stundenkreis mufs gegen den Stundenkreis ♈ eine gleichförmige Drehung ausführen. Ein Gestirn, welches sich auf dem Aequator gleichförmig bewegte, würde die verlangte Eigenschaft besitzen.

Ein solches Gestirn existirt nicht. Aber wegen des entscheidenden Einflusses, welchen die Sonne auf alles Organische ausübt, auf Menschen, Thiere und Pflanzen, auch auf das unorganische Luftmeer, seine Strömungen, Niederschläge und Temperaturverhältnisse, hat man ein ideales „Zeitgestirn", die *mittlere Sonne* S_m fingirt, dessen *Stundenkreis sich möglichst wenig von dem Stundenkreise der wahren Sonne entfernt*, nämlich westlich nie mehr als $14{,}5^m$, östlich nie mehr als $16{,}4^m$. Dadurch wird *der Zeitunterschied zwischen dem wahren Mittag*, d. h. der O. C. von

$\odot$, *und dem mittleren Mittag*, d. h. der O. C. von S_m, *so klein wie möglich* gehalten. Analoges gilt dann auch für die *wahre und mittlere Mitternacht*, d. h. für die U. C. von $\odot$ und S_m.

Die Lage von S_m in Bezug auf die wahre Sonne $\odot$ wird durch folgende Festsetzungen bestimmt:

Man läfst zunächst *einen Punkt auf der Ekliptik sich gleichförmig in der Weise bewegen, dafs derselbe gleichzeitig mit der* $\odot$ *durch die Apsidenpunkte, das Perihel und Aphel, tritt.* Da die Apsidenpunkte durch die grofse Axe der Erdbahn-Ellipse bestimmt sind, so werden die durch sie bestimmten Halbkreise der Ekliptik in gleichen Zeiten durchlaufen.

Dieser ideale Punkt heifst die *mittlere Ekliptiksonne* S_ε.

Sobald derselbe durch den ♈ tritt, läfst man *vom* ♈ *einen zweiten Punkt ausgehen, welcher gleichförmig und mit der Geschwindigkeit der* S_ε *auf dem Aequator fortschreitet, also gleichzeitig mit* S_ε *durch die Aequinoctialpunkte tritt. Dieser Punkt ist die mittlere Sonne* S_m.

Von den beiden Ursachen, welche der ungleichförmigen AR-Aenderung der $\odot$ zu Grunde liegen: ungleichförmige Bewegung auf der Ekliptik und Neigung der Ekliptik gegen den Aequator, wird die erste beseitigt durch S_ε, die sich zwar noch auf der Ekliptik bewegt, aber doch gleichförmig auf ihr. Die zweite Ursache wird dadurch beseitigt, dafs der mittleren Ekliptiksonne S_ε ein Punkt S_m zugeordnet wird, welcher sich *ebenso auf dem Aequator* bewegt, wie S_ε *auf der Ekliptik.*

Die Abstände des Stundenkreises $\odot$ und des Stundenkreises S_m werden dadurch so klein gehalten wie möglich, dafs man S_ε gleichzeitig mit $\odot$ durch die Apsidenpunkte, und S_m gleichzeitig mit S_ε durch die Aequinoctialpunkte treten läfst.

Bedeuten $\alpha_\odot$, α_ε, α_m die Rectascensionen von $\odot$, S_ε, S_m für denselben Augenblick, so heifst

$$(\alpha_\odot - \alpha_\varepsilon) + (\alpha_\varepsilon - \alpha_m) = \alpha_\odot - \alpha_m = \omega$$

die *Zeitgleichung.* Der numerische Werth von ω ist der Abstand der Stundenkreise $\odot$ und S_m. Derselbe wird während eines *„tropischen Jahres“* (Nr. 107.) viermal gleich Null, d. h. viermal fallen die Stundenkreise der beiden Sonnen zusammen. In Bezug auf den gleichförmig rotirenden Stundenkreis S_m besteht die Bewegung des Stundenkreises $\odot$ in einem langsamen, ungleich-

förmigen Hin- und Herschwingen um die durch S_m gegebene Mittellage. Der Stundenkreis ⊙ erreicht dabei successive einen westlichen Ausschlag von etwa $3^m 50^s$, einen östlichen von etwa $6^m 20^s$, einen westlichen von etwa $16^m 20^s$ und einen östlichen von etwa $14^m 25^s$ gegen den Stundenkreis S_m.

Die Zeiteinheiten der mittleren Sonnenstunde, des mittleren Tages und des tropischen Jahres.

106. Die *AR* α_m der mittleren Sonne ändert sich in gleichen Zeitintervallen um denselben Betrag. Es soll $\delta\alpha$ diese Aenderung während *einer Stunde Sternzeit* (1^h St. Z.) bezeichnen, wenn als *Einheit für* $\delta\alpha$ *die sphärische Winkelstunde* gilt.

Durch die westliche Drehung der rotirenden Himmelskugel wächst der westliche Abstand des Stundenkreises S_m von irgend einem Meridian der ruhenden Himmelskugel während einer Stunde Sternzeit um eine Winkelstunde, und gleichzeitig vollführt der Stundenkreis S_m auf der rotirenden Himmelskugel eine östliche Drehung vom Winkelbetrage $\delta\alpha$. Das Resultat ist ein Wachsthum des westlichen Abstandes von dem ins Auge gefaſsten Meridian um $(1 - \delta\alpha)$ sphärische Winkelstunden.

Definiren wir die *mittlere Sonnenstunde* oder *mittlere Stunde* als das *Zeitintervall, in welchem der Stundenkreis* S_m *eine sphärische Winkelstunde beschreibt*, so werden $(1 - \delta\alpha)$ sphärische Winkelstunden in $(1 - \delta\alpha)$ Stunden mittlerer Zeit beschrieben. Da dieses Zeitintervall gleich einer Stunde Sternzeit ist, also

$$1 \text{ Stunde Sternzeit} = (1 - \delta\alpha) \text{ Stunden mittlerer Zeit,}$$

so ist:

$$1 \text{ Stunde mittlerer Zeit} = \frac{1}{1 - \delta\alpha} \text{ Stunden Sternzeit.}$$

Ein Zeitintervall von B Stunden mittlerer Zeit soll durch B^h M. Z. bezeichnet werden.

Analog wie für die Sternzeit (St. Z.) werden auch für die mittlere Zeit (M. Z.) Minuten und Secunden als Untereinheiten der Stunde gebraucht. Verstehen wir unter C^m M. Z. und D^s M. Z. die Zeitintervalle von C Minuten M. Z. und D Secunden M. Z., so ist:

$$1^h \text{ M. Z.} = 60^m \text{ M. Z.} = 3600^s \text{ M. Z.}$$

Hat $\varDelta\alpha$ für die mittlere Stunde die analoge Bedeutung, welche $\delta\alpha$ für die Sternstunde hat, so wird:

$$\varDelta\alpha = \frac{1}{1-\delta\alpha}\,\delta\alpha;$$

denn in 1^h M. Z. $= \left(\frac{1}{1-\delta\alpha}\right)^h$ St. Z. ändert sich die $AR\,\alpha_m$ von S_m um $\frac{1}{1-\delta\alpha}\,\delta\alpha$.

Der Gleichung $\varDelta\alpha = \frac{1}{1-\delta\alpha}\,\delta\alpha$ lassen sich verschiedene Formen geben:

$$\varDelta\alpha = (1+\varDelta\alpha)\,\delta\alpha, \qquad \delta\alpha = (1-\delta\alpha)\,\varDelta\alpha,$$

$$\frac{\varDelta\alpha}{\delta\alpha} = 1+\varDelta\alpha, \qquad \frac{\delta\alpha}{\varDelta\alpha} = 1-\delta\alpha,$$

$$1 = (1-\delta\alpha)\,(1+\varDelta\alpha) \text{ oder } \frac{1}{1-\delta\alpha} = 1+\varDelta\alpha.$$

Demgemäfs wird:

1^h mittlerer Zeit $= (1+\varDelta\alpha)^h$ Sternzeit,
1^h Sternzeit $= (1-\delta\alpha)^h$ mittlerer Zeit.

Ist σ der Werth eines Zeitintervalls in Bezug auf die Einheit der Sternzeitstunde und τ der Werth desselben Zeitintervalls in Bezug auf die Einheit der mittleren Stunde, so ist entsprechend:

$$\sigma = \tau\,(1+\varDelta\alpha), \qquad \tau = \sigma\,(1-\delta\alpha).$$

Diese beiden Verwandlungen werden bei numerischen Rechnungen häufig verlangt; auch hat man ihre Ausführung durch Tafeln erleichtert, aus denen $\tau\varDelta\alpha$ und $\sigma\delta a$ entnommen werden. Die Werthbestimmung von $\delta\alpha$ und $\varDelta\alpha$ findet sich in Nr. 107.

Das Zeitintervall zwischen zwei auf einander folgenden oberen Culminationen der mittleren Sonne heifst ein *mittlerer Tag* oder *ein Tag mittlerer Zeit* (1^d M. Z.). Während desselben wächst der Abstand der S_m von dem Ortsmeridian um 24 sphärische Winkelstunden. Da diese in 24^h M. Z. von dem Stundenkreis S_m beschrieben werden (Nr. 100.), so ist:

$$1^d \text{ M. Z.} = 24^h \text{ M. Z.}$$

107. Aufser den bisher abgeleiteten Zeiteinheiten hat das Bedürfnifs nach gröfseren Zeiteinheiten die Einheitenclasse der „*Jahre*“ geschaffen. Darunter versteht man Zeitintervalle, welche

direct oder indirect durch die *Umlaufszeit der Erde um die Sonne* bestimmt werden.

Das Zeitintervall zwischen zwei aufeinander folgenden Durchtritten der Sonne *durch denselben Punkt der Ekliptik* ist gleich der Umlaufszeit der Erde und heifst ein *siderisches Jahr.*

Das Zeitintervall zwischen zwei aufeinander folgenden Durchtritten der Sonne durch den *Frühlingspunkt der Ekliptik* heifst ein *tropisches Jahr.*

In dem Augenblick, wo die ⊙ durch den ♈ tritt, ist ihre Declination gleich Null; dieser Zeitpunkt läfst sich aus Beobachtungen der ⊙ und Messungen ihrer Declination berechnen.

Man kann also Anfang und Ende eines tropischen Jahres feststellen und daraus die zwischen ihnen gelegene Jahreslänge.

Die Werthe des tropischen Jahres in der Einheit der mittleren Stunde, der Sternstunde, des mittleren Tages, des Sterntages seien bezw. T_m, T_s, D_m, D_s, wo D_s gleichzeitig die Anzahl der Erdrotationen während eines tropischen Jahres bedeutet (Nr. 104., Anfang). Dann ist nach unserer Bezeichnungsweise:

$$1 \text{ tropisches Jahr} = T_m^h \text{ M. Z.} = T_s^h \text{ St. Z.}$$
$$= D_m^d \text{ M. Z.} = D_s^d \text{ St. Z.}$$

Ferner ist:

$$T_m = 24\, D_m, \quad T_s = 24\, D_s,$$

$$T_m = T_s\,(1 - \delta\,\alpha) = T_s\,\frac{\delta\,\alpha}{\varDelta\,\alpha}, \quad T_s = T_m\,(1 + \varDelta\,\alpha) = T_m\,\frac{\varDelta\,\alpha}{\delta\,\alpha}.$$

Da die AR α_m der S_m während eines tropischen Jahres ein Wachsthum von 24 Winkelstunden erfährt (denn nur unter dieser Bedingung kann der zweite Durchtritt durch den ♈ erfolgen), so ist:

$$T_m\,\varDelta\,\alpha = 24 \text{ und } T_s\,\delta\,\alpha = 24,$$

also:

$$D_m\,\varDelta\,\alpha = 1, \quad D_s\,\delta\,\alpha = 1, \quad D_m\,\varDelta\,\alpha = D_s\,\delta\,\alpha,$$

$$\varDelta\,\alpha = \frac{24}{T_m} = \frac{1}{D_m}, \quad \delta\,\alpha = \frac{24}{T_s} = \frac{1}{D_s},$$

$$\frac{D_s}{D_m} = \frac{\varDelta\,\alpha}{\delta\,\alpha} = 1 + \varDelta\,\alpha,$$

$$\frac{D_m}{D_s} = \frac{\delta\,\alpha}{\varDelta\,\alpha} = 1 - \delta\,\alpha.$$

Die Verwandlungsfactoren $1 + \varDelta\alpha$, bezw. $1 - \delta\alpha$ für mittlere Zeit in Sternzeit, bezw. für Sternzeit in mittlere Zeit, sind also durch D_m und D_s in einfacher Quotientenform darstellbar.

Aus

$$D_s = D_m\,(1 + \varDelta\alpha) = D_m + D_m\,\varDelta\alpha,$$

folgt

$$D_s = D_m + 1,$$

d. h. der *Werth des tropischen Jahres in der Einheit des Sterntages ist um 1 gröfser als der Werth desselben in der Einheit des mittleren Tages.*

Es wird dies mitunter in der Form ausgesprochen: das tropische Jahr besitzt einen Sterntag mehr als es mittlere Tage besitzt.

Für das Jahr 1900 war die Präcession gleich 50″2479, ferner:

$$D_m^d = 365^d2422\ldots = 365^d5^h48^m47^s22 \text{ M.Z.}, \quad D_s^d = 366^d2422\ldots \text{ St.Z.},$$

$$\log D_m = 2{,}5625809, \quad \log D_s = 2{,}5637684.$$

Da

$$\varDelta\alpha = 1 : D_m = \frac{1}{365.2422}, \qquad \delta\alpha = 1 : D_s = \frac{1}{366.2422},$$

so folgt:

$$1 + \varDelta\alpha = \frac{366.2422}{365.2422}, \qquad 1 - \delta\alpha = \frac{365.2422}{366.2422},$$

$$\log \varDelta\alpha = 0{,}4374191 - 3, \qquad \log \delta\alpha = 0{,}4362316 - 3,$$

$$\varDelta\alpha^h = 0^h00273791, \qquad \delta\alpha^h = 0^h00273043,$$

$$(60.60\,\varDelta\alpha)^s = 9^s856, \qquad (60.60\,\delta\alpha)^s = \delta\alpha^s = 9^s830,$$

$$24\,.\,9^s856 = 3^m\,56^s\,56, \qquad 24\,.\,9^s830 = 3^m\,55^s\,91.$$

Die AR der S_m wächst also während einer mittleren Stunde um 9^s856, während einer Stunde Sternzeit um 9^s830, während eines mittleren Tages um $3^m\,56^s\,56$ und während eines Sterntages um $3^m55^s\,91$.

Bei einer Präcession des ♈ von 50″2479 beschreibt die Sonne während eines tropischen Jahres den Bogen 360° — 50″2479 auf der Ekliptik, also während

$$\frac{50''2479}{(360\,.\,60\,.\,60 - 50{,}2479)''}\ 365{,}2422 \text{ mittleren Tagen},$$

oder 20^m23^s56 M. Z. den Bogen 50″2479.

Der Bogen 360° oder die ganze Ekliptik wird demnach in $(365^d\,2422 + 20^m\,23^s\,56)$ M. Z. beschrieben.

Folglich ist die constant bleibende *Länge des siderischen Jahres* gegeben durch

$$\begin{array}{l} 365^d\,5^h\,48^m\,47^s\,22 \text{ M. Z. (tropisches Jahr)} \\ \qquad\quad 20^m\,23^s\,56 \\ \hline 365^d\,6^h\;\;9^m\,10^s\,78 \text{ M. Z. (siderisches Jahr).} \end{array}$$

Da die mittlere Präcession jährlich um $\sigma'' = 0''0002442966$ *wächst* und zur Beschreibung dieses Bogens

$$\frac{\sigma''}{50''2479}\,(20 \cdot 60 + 23{,}56)^s \text{ M. Z.} = 0^s\,005948 \text{ M. Z.}$$

erforderlich sind, so verkürzt sich das mittlere tropische Jahr jährlich um diesen Betrag. In 1000 Jahren würde demnach eine Verkürzung von etwa 6^s M. Z. eingetreten sein.

Anomalistisches Jahr. Mondjahr.

108. Unter *Anomalie* wird der *östliche Abstand der* ⊙ *vom Perihel* verstanden. Die Anomalie ist gleich Null, wenn die ⊙ durch das Perihel tritt. Das Zeitintervall zwischen zwei aufeinander folgenden Durchtritten der ⊙ durch das Perihel heifst ein *anomalistisches Jahr.* Da das Perihel eine mittlere *östliche* Bewegung von 11″464 besitzt (um diesen Betrag dreht sich die grofse Axe der Erdbahn), und da die Sonne diesen Bogen in $4^m\,39^s\,15$ durchläuft, so ist das *anomalistische Jahr* um $4^m\,39^s$ länger als das siderische Jahr, folglich um etwa *25^m länger als das tropische Jahr.*

Unter einem *synodischen Monat* wird das Zeitintervall zwischen zwei aufeinander folgenden Durchtritten des Längenkreises des Mondes durch den der ⊙ verstanden.

Zwölf synodische Monate bilden ein *Mondjahr.*

Die bürgerlichen Jahre und der Kalender.

109. Aufgabe der Zeitrechnung oder des Kalenders ist es, die Lage von Zeitpunkten und Zeitintervallen in der Zeit eindeutig zu bezeichnen. Das Princip ist das Analogon des Princips, durch welches die Lage von Punkten auf einer Geraden bestimmt wurde. Das letztere setzte einen Ursprung O fest, eine Streckeneinheit und eine positive und negative Richtung für das Fortschreiten

auf der Geraden. Jeder Punkt der Geraden wurde durch die Länge der Strecke charakterisirt, welche denselben vom Ursprung O trennte; diese Zahl erhielt das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem der Punkt von O aus in positiver oder negativer Richtung lag, und hiefs die Coordinate desselben. Die Lage einer beliebigen Strecke und ihre Länge wurden eindeutig bestimmt durch die Coordinaten ihrer Endpunkte (Nr. 43.).

So nehmen wir nun auch für jede Zeitrechnung einen Anfang oder Ursprung an (für unsere Zeitrechnung heifst derselbe Christi Geburt) und *bestimmen einen Zeitpunkt durch die Länge des Zeitintervalls, welches denselben vom Anfang der Zeitrechnung trennt.* Es ist klar, dafs, wenn wir die so entstehenden Werthe von Zeitintervallen gleichzeitig als die Coordinaten von Punkten einer Geraden ansehen, dafs alsdann jedem Zeitpunkt ein Punkt der Geraden, jedem durch Lage und Gröfse bestimmten Zeitintervall eine analog bestimmte Strecke entspricht.

Während wir es nun bei dem Coordinatensystem der *geradlinigen Punktschaar* (Nr. 43.) stets nur mit *einer* Einheit zu thun hatten, liegt die Sache bei der *Punktschaar der Zeit* anders. Für das Coordinatensystem derselben gibt es eine *Anzahl verschiedener Einheiten.* Es gibt *zwei Jahreseinheiten von 365 und 366 mittleren Tagen*, diese heifsen bürgerliche Jahre. Ferner haben wir vier verschiedene *Monatseinheiten* zu 28, 29, 30 und 31 Tagen; endlich den mittleren Tag, die mittlere Stunde, Minute, Secunde und ihre Bruchtheile. Die uralte Einheit von sieben Tagen, die *Woche*, wird für die Zeitangaben des weltlichen Kalenders nicht verwerthet, wohl aber für diejenigen des kirchlichen Kalenders.

Dafs für die Länge, selbst nur der historischen Zeiträume, der mittlere Tag als Einheit unbequem ist, liegt auf der Hand. Wir würden mit dieser Einheit viel zu grofse Zahlen für die Coordinatenwerthe heranziehen müssen. Aus diesem Grunde gibt man ein Zeitpunkt-bestimmendes Zeitintervall als Summe von mehreren Intervallen an, deren jedes auf eine andere Einheit bezogen ist; analog wie wir einen Bogen als eine Summe von drei Bogen darstellen, z. B. $27^0 40' 33''$, welche sich auf drei verschiedene Einheiten beziehen.

Wäre das tropische Jahr ein ganzes Vielfaches von mittleren Tagen, so würde sich dasselbe am besten als die höhere Einheit der

Zeitrechnung empfehlen. Denn innerhalb eines tropischen Jahres vollzieht sich ein Kreislauf in dem organischen Leben der Pflanzenwelt, in den Belichtungs-, Temperatur- und Witterungsverhältnissen jedes Ortes und wiederholt sich in seinen grofsen Zügen in allen folgenden Jahren. Unsere Existenz wird von den verschiedenen Phasen dieser Veränderungen so stark beeinflufst, dafs jeder Mensch das tropische Jahr als den natürlichsten gröfseren Zeitabschnitt empfindet.

Nun ist aber die Dauer des tropischen Jahres gleich 365,2422 mittleren Tagen, d. h. etwas kleiner als $365^1/_4$ Tag und kein ganzes Vielfaches des mittleren Tages. Daher mufste der Kalender danach streben, diese unbequeme Thatsache unschädlich zu machen und *Jahre von 365 und 366 Tagen* so aufeinander folgen zu lassen, dafs jedem derselben *der Charakter des tropischen Jahres möglichst erhalten blieb.*

110. Das Kalenderprincip bestand also darin, für *zwei verschiedene*, sogenannte *„bürgerliche Jahre"*, das eine zu 365, das andere zu 366 mittleren Tagen, eine solche Folge aufzustellen, dafs eine Anzahl von a Jahren zu 365 Tagen plus einer Anzahl von b Jahren zu 366 Tagen genau ein Zeitintervall von $(a + b)$ tropischen Jahren bildeten. Es handelte sich nur darum, zwei ganze Zahlen a und b zu finden, welche der Forderung auch wirklich genügten.

Der sogenannte *Julianische Kalender* (durch Julius Cäsar eingeführt) hat das Problem im Princip gelöst. Aber erst der im Jahre 1582 eingeführte *Gregorianische Kalender* (Papst Gregor XIII. 1572 bis 1585) hat den Fehler des Julianischen beseitigt.

Der Julianische Kalender setzte $a = 3$, $b = 1$, unter der Annahme, dafs das tropische Jahr genau gleich $365^1/_4$ Tag wäre. Ein Jahr von 365 Tagen wurde als *gemeines bürgerliches Jahr* bezeichnet, ein Jahr von 366 Tagen als *bürgerliches Schaltjahr.* Im Uebrigen zerfiel das Jahr in die bekannten *12 Monate.* Unter ihnen bildeten der *Januar*, *März*, *Mai*, *Juli*, *August*, *October*, *December* gleiche Zeitintervalle von 31 mittleren Tagen; der *April*, *Juni*, *September*, *November* gleiche Zeitintervalle von 30 mittleren Tagen, der *Februar* eines gemeinen Jahres, bezw. eines Schaltjahres, ein Zeitintervall von 28, bezw. 29 mittleren Tagen.

Die Annahme des Julianischen Kalenders war ungenau: vier julianische Jahre sind *länger* als vier tropische Jahre, und der Fehler machte sich dadurch bemerkbar, dafs der Durchtritt der ⊙ durch den ♈ allmählich auf ein *früheres* Datum fiel. Denn nehmen wir an, dafs das Ereignifs des Durchtritts am 21. März stattfand, so waren nach vier tropischen Jahren, wo das Ereignifs sich zum vierten Male wiederholte, weniger als vier mittlere julianische Jahre verflossen. Der Zeitpunkt mufste also in dem Julianischen Kalender ein kleineres, dem Jahresanfang näher gelegenes Datum erhalten.

Das Mittel aus vier aufeinander folgenden julianischen Jahren von $(3 . 365 + 366)$ Tagen ist 365,25 Tage und heifst ein *mittleres julianisches Jahr.* Das tropische Jahr ist gleich 365,2422 Tagen. Der Unterschied beträgt 0,0078 Tage. Um so viel ist das mittlere julianische Jahr länger als das tropische.

Da $1 : 0{,}0078 = 128{,}25$ ist, so werden 128,25 julianische Jahre *um einen mittleren Tag länger* sein als 128,25 tropische Jahre. Im Jahre 325 (Concil zu Nicäa) trat die ⊙ am 21. März durch den ♈; 1257 Kalenderjahre später, d. h. im Jahre 1582, fand der Durchtritt etwa zehn Kalendertage früher statt. Denn es ist $0{,}0078 \times 1257 = 9{,}775 = 10 \ldots$

Der Julianische Kalender genügte also der Forderung nicht, dafs der Durchtritt der ⊙ durch den ♈ stets an demselben Kalendertage stattfände, d. h. dafs die ⊙ *dieselbe* Declination (Null) erhielte. War aber diese Bedingung erfüllt, so erhielt die ⊙ auch für *jeden anderen Kalendertag stets wieder dieselbe Declination.*

Von der Beziehung der Sonnendeclination zu den Jahreszeiten wird weiter unten (Nr. 125.) die Rede sein. Hier sei nur bemerkt, dafs die Anfänge der vier Jahreszeiten, in welche wir unser Jahr zerlegen, an bestimmte Werthe der veränderlichen Sonnendeclination geknüpft sind, nämlich an die Werthe, welche für die Durchtritte der ⊙ durch die Aequinoctien und Solstitien gelten. Der Kalender soll nun so eingerichtet sein, dafs einem *bestimmten Werth der Sonnendeclination in jedem Kalenderjahre derselbe Kalendertag innerhalb enger Grenzen entspricht;* dafs also die Anfänge der vier Jahreszeiten an vier bestimmte Kalendertage gebunden sind.

111. Dieser Forderung genügt der verbesserte Julianische Kalender, genannt der *Gregorianische Kalender.* Es ist staunenswerth, wie einfach und mit welcher Genauigkeit das erstrebte Ziel hier erreicht wird. Statt $a = 3$, $b = 1$ wurde gesetzt $a = 303$, $b = 97$, und die Verbesserung des Julianischen Kalenders, in welchem alle durch vier theilbaren Jahreszahlen die Schaltjahre lieferten, bestand lediglich in folgender Festsetzung:

Von den durch 4 theilbaren Jahreszahlen sollen die durch 100, 200, 300 theilbaren gemeine bürgerliche Jahre liefern; alle übrigen durch vier theilbaren Jahreszahlen sollen Schaltjahre liefern.

Es sind also 1700, 1800, 1900 gemeine bürgerliche Jahre, dagegen 1600, 2000, 2400 Schaltjahre.

Damit nun wiederum der Durchtritt der ⊙ durch den ♈, der sogenannte *Frühlingsanfang*, auf den 21. März fiele, griff Papst Gregor XIII. zu einem ebenso kühnen wie einfachen Mittel; es erinnert an das Durchhauen des gordischen Knotens. Der Papst befahl der katholischen Christenheit, daſs der auf den 4. October 1582 folgende Tag von ihr als der 15. October bezeichnet würde. Dadurch erhielt der Tag des Frühlingsanfangs, welcher sonst als 11. März hätte bezeichnet werden müssen, wiederum das Datum des 21. März. Daſs dieses Datum dem Frühlingsanfang auf mehrere Jahrtausende erhalten blieb, dafür sorgten die übrigen bereits erwähnten Festsetzungen des Kalenders.

Danach werden 400 mittlere gregorianische Jahre nur um 0,10324 mittlere Tage gröſser als 400 tropische Jahre, also 4000 gregorianische Jahre um etwa einen Tag länger als 4000 tropische Jahre. Folglich hätte man nur nöthig, alle 4000 Jahre einen Kalendertag zu streichen, um dem Frühlingsanfang das Durchschnittsdatum des 21. März auf lange Zeiten zu erhalten [1]).

Es hat länger als ein Jahrhundert gedauert, bevor die hohe Zweckmäſsigkeit des Gregorianischen Kalenders das Widerstreben der protestantischen Länder gegen den päpstlichen Ursprung überwand. Auch heute noch bedienen sich die Länder der griechisch-orthodoxen Kirche, vor allem Ruſsland, des Julianischen Kalenders. Sonst aber gilt der Gregorianische Kalender in den europäischen Reichen, ihren Colonien und in den beiden Amerikas.

---

[1]) La Place, Oeuvres complètes, Paris 1884, Tome VI, pag. 20.

Kalenderdatum eines Zeitpunkts.

112. Ein Zeitpunkt wird kalendermäfsig bestimmt durch Angabe einer Jahreszahl, eines Monats, eines Monatstages und eines Stundenwinkels, z. B. durch

1902 Juni 20^d $4^h 45^m 36^s 82$ M. Z.

Ein solches Datum bedeutet ein bestimmtes Zeitintervall, und die folgende Analyse des Beispiels genügt, um die allgemeine Regel für die Auswerthung klar zu machen.

Das gegebene Zeitintervall ist die Summe:

a) der julianischen Jahre 1, 2, 3 ... 1581 zu 365 Tagen für die gemeinen, zu 366 Tagen für die *julianischen* Schaltjahre,

b) des Jahres 1582 von 355 Tagen,

c) der gregorianischen Jahre 1583, 1584 ... 1901 zu 365 Tagen, bezw. 366 Tagen für die gemeinen bürgerlichen Jahre, bezw. *gregorianischen* Schaltjahre,

d) der Monate Januar = 31 Tagen, Februar = 28 Tagen, März = 31 Tagen, April = 30 Tagen, Mai = 31 Tagen,

e) der 19 Juni-Tage, welche dem Tage 20 vorangehen,

f) des Zeitintervalls von $4^h 45^m 36^s 82$ M. Z.

Das Zeitintervall zwischen zwei durch ihr Kalenderdatum gegebenen Zeitpunkten ist demnach darstellbar als die Differenz zweier Zeitintervalle, welche sich aus den beiden Kalenderdaten nach der in dem Beispiele angewandten Regel ergeben.

Jeder *bürgerliche* Tag beginnt mit der *unteren* Culmination der mittleren Sonne S_m, also mit der *mittleren Mitternacht.* Die Zeit von Mitternacht bis Mittag heifst der *Vormittag* des bürgerlichen Tages; die Zeit von Mittag bis Mitternacht sein *Nachmittag.*

Für den bürgerlichen Tag wird ein Zeitpunkt des Vormittags durch den westlichen Abstand des Stundenkreises S_m vom *unteren* Meridian gegeben; ein Zeitpunkt des Nachmittags durch den analogen Abstand vom *oberen* Meridian, so dafs die Abstände stets zwischen 0^h und 12^h liegen. Ist τ^h ein solcher Abstand, so bedeutet τ^h V, bezw. τ^h N, dafs sich derselbe auf einen Zeitpunkt des Vormittags, bezw. des Nachmittags bezieht.

Der *astronomische Tag gleichen Datums* beginnt 12 Stunden *später*, also mit dem *mittleren Mittag* des gleichlautenden bürger-

lichen Kalendertages. Die Zeitpunkte des *astronomischen Tages* werden durch die von 0^h bis 24^h gezählten westlichen Stundenwinkel der mittleren Sonne angegeben.

113. Für zwei verschiedene Erdorte kann der Tag, der bürgerliche wie der astronomische, nur dann *gleichzeitig* beginnen, wenn sie *denselben oberen*, also auch *denselben unteren Meridian* besitzen. Denn nur in diesem Falle hat *jedes* Gestirn, gleichviel ob ☉, S_m, ♈ oder Stern in demselben Zeitpunkt denselben Stundenwinkel in Bezug auf beide Orte. Der Stundenflügel eines Erdortes schneidet das Erdsphäroid in Punkten, deren obere Meridianflügel (S. 93) mit dem Stundenflügel zusammenfallen. Alle Punkte der Schnittcurve besitzen denselben oberen Meridian, und diese Halbellipse heifst ein *Erdmeridian*; er bildet mit dem Erdmeridian des Gegenflügels eine Meridianellipse (Nr. 69., Anfang).

Liegen zwei Erdorte auf *verschiedenen* Erdmeridianen, so beginnen ihre Tage zu *verschiedenen* Zeitpunkten und sind gegen einander verschoben. Es sei *einer* der beiden Tage ein *Greenwicher Tag.* Alsdann beginnt für einen Ort O der Greenwicher westlichen Länge λ_ω^h ein bestimmter Tag um λ_ω Stunden später als der Greenwichtag und gleichzeitig um $(24 - \lambda_\omega)$ Stunden früher, als der nächst folgende Greenwichtag. Es fragt sich nun, ob der Tag des Ortes O das Datum des ersten oder des folgenden Tages von Greenwich erhält?

Hierüber entscheiden zwei verschiedene Festsetzungen. Die erste gilt für Seefahrer und lautet: mittels der Meridianebene von Greenwich zerlegt man die Erde in eine *westliche und östliche Erdhälfte* (S. 93). Ein Punkt der *westlichen* Erdhälfte von der westlichen Länge λ_ω^h erhält im Beginn jedes Tages das Datum, welches Greenwich *seit* λ_ω *Stunden besitzt*, und ein Punkt der *östlichen* Erdhälfte von der östlichen Länge λ_ε^h erhält im Beginn jedes Tages das Datum, welches Greenwich *erst* λ_ε *Stunden später annimmt.*

Die zweite Festsetzung hat ihren Ursprung in der Verschiedenheit der Wegrichtungen — westlich oder östlich —, in denen die Länder der Zone um den Erdmeridian der Länge $12^h = 180^0$ von den Europäern zuerst erreicht worden sind.

In dieser Festsetzung wird der Erdmeridian 180^0 ersetzt durch die sogenannte *„Datumscheide“*. Dieselbe windet sich um

jenen, ohne festes Land zu schneiden, beginnt in der Behringstrafse und schmiegt sich in ihrem Verlauf durch den Stillen Ocean dem asiatischen Continent an. Es liegen Japan, die Sunda-Inseln, Neu-Guinea, Australien, Neu-Seeland *westlich* der Datumscheide; dagegen die Philippinen, Polynesien, Amerika *östlich* davon.

Mittels des Erdmeridians von Greenwich und der Datumscheide zerlegt man die Erde in zwei Theile: das *westliche und das östliche Datumgebiet*, und stellt nun dieselbe Regel auf, welche gilt, wenn an Stelle der Datumscheide der Erdmeridian 180° tritt.

Aus diesen Festsetzungen folgt: ist für einen beliebigen absoluten Zeitpunkt T das Kalenderdatum eines Greenwichtages gleich K und die mittlere Zeit gleich τ^h, so entsteht das Kalenderdatum und die Tageszeit für einen Ort der westlichen Länge λ_ω aus $K + \tau^h - \lambda_\omega^h$, und für einen Ort der östlichen Länge λ_ε aus $K + \tau^h + \lambda_\varepsilon^h$.

Ist beispielsweise für Greenwich ein Zeitpunkt T gegeben durch $K =$ Juni $30^d\,18^h$, so ist für einen Ort der westlichen Länge $\lambda_\omega = 11^h$ der Zeitpunkt T gegeben durch

$$\text{Juni } 30^d + 18^h - 11^h = \text{Juni } 30^d\,7^h$$

und für einen Ort der östlichen Länge $\lambda_\varepsilon = 9^h$ durch

$$\text{Juni } 30^d + 18^h + 9^h = \text{Juni } 30^d + 27^h = \textit{Juni } 30^d + 1^d + 3^h$$
$$= \textit{Juli } 1^d\,3^h.$$

Ist der Ort auf der Datumscheide gelegen, so gehört er gleichzeitig dem westlichen und östlichen Datumgebiet an. In der ersten Eigenschaft hat der Zeitpunkt T das Datum $K + \tau^h - \lambda_\omega^h$, in der zweiten Eigenschaft das Datum $K + \tau^h + (24^h - \lambda_\omega^h)$, weil für denselben Ort $\lambda_\varepsilon^h = 24^h - \lambda_\omega^h$ ist. Die beiden Zeitangaben unterscheiden sich also um einen Kalendertag. Mit anderen Worten: die Punkte der Datumscheide haben ein *doppeltes*, um einen Tag verschiedenes Datum. Analoges gilt natürlich auch, wenn der Erdmeridian $180^0 = 12^h$ die Datumscheide bildet; für diese haben alle Orte gleichzeitig die westliche Länge 12^h und die östliche Länge 12^h.

114. Auf einer Reise, welche von irgend einem Erdmeridian M ausgeht und daselbst endet, sollen alle Längengrade in östlicher Richtung durchschnitten werden. Alsdann wächst der östliche

Längenabstand des Reisenden ununterbrochen und hat bei dessen Rückkehr nach M den Werth 24^h erreicht.

Versteht man unter einem *Reisetag* das Zeitintervall zwischen zwei auf einander folgenden oberen Culminationen der mittleren Sonne, und bezeichnet $\Delta\lambda^h$ den Längenzuwachs am Ende des Reisetages, so ist der letztere um $\Delta\lambda$ mittlere Stunden kürzer, als ein mittlerer Tag. Findet die Rückkehr am n^{ten} Reisetage statt, so sind n Reisetage verflossen, welche zusammen um 24 mittlere Stunden kürzer sind, als n mittlere Tage, weil die Summe der Längenzuwächse 24^h beträgt; d. h. es sind $n - 1$ mittlere Tage für den Meridian M verflossen. Da in dieser Zeit das Reisedatum um n Tage gewachsen ist, so ist dasselbe um *einen* Tag gröſser, als das des Ortes auf M, d. h. um einen Tag *voraus*.

Das Umgekehrte tritt ein, wenn die Reise in westlicher Richtung ausgeführt wird. Hier ist ein Reisetag um $\Delta\lambda$ mittlere Stunden länger, als ein mittlerer Tag, wenn $\Delta\lambda^h$ das Wachsthum des westlichen Längenabstandes vom Meridian M bedeutet. Findet die Rückkehr am n^{ten} Reisetage statt, so sind $n + 1$ mittlere Tage für den Ort des Meridians M verflossen. Das Reisedatum ist also um einen Tag *zurück* gegen das Ortsdatum.

Aus diesem Grunde wird das Datum um einen Tag erniedrigt, bezw. um einen Tag erhöht, wenn man auf einer Reise im östlichen, bezw. im westlichen Sinne die Datumscheide überschreitet. Dies gilt sowohl für die maritime Datumscheide des Erdmeridians 180°, wie für die oben bezeichnete historische Datumscheide.

Zeitverwandlung.

115. Es lassen sich zwei Arten von „Zeitverwandlung" unterscheiden. Die *eine* Art bestimmt das Kalenderdatum eines absoluten Zeitpunktes T für einen Ort der westlichen Länge λ_ω, bezw. der östlichen Länge λ_ε aus dem Greenwicher Kalenderdatum von T und umgekehrt.

In dieser Beziehung haben wir bereits (Nr. 113.) eingesehen, daſs

$$K + \tau^h + \lambda^h_\varepsilon, \text{ bezw. } K + \tau^h - \lambda^h_\omega$$

das Datum eines Zeitpunktes für einen Ort der östlichen Länge λ^h_ε, bezw. der westlichen Länge λ^h_ω wird, wenn der Zeitpunkt in Bezug auf Greenwich das Kalenderdatum $K\tau^h$ besitzt. K heiſst

das *Tagesdatum*, z. B. $K = 1902$ Mai 29^d; τ^h die *Tageszeit* oder „*Uhr*", z. B. $3^h 30^m$.

Diese Zeitverwandlung ist von grofser praktischer Bedeutung. Denn die Zahlenangaben, deren wir bedürfen, und welche mit der Zeit veränderlich sind, werden für unsere Zwecke aus den astronomischen Ephemeriden des „Nautischen Jahrbuchs" (Nr. 336.) entnommen, in welchem sämmtliche Zeitangaben auf Greenwich bezogen sind. Soll also für einen in Ortszeit gegebenen Zeitpunkt irgend eine Angabe aus den Ephemeriden entnommen werden, so mufs dieser Zeitpunkt zuvor in Greenwichzeit ausgedrückt werden.

116. Die *andere* Art von Zeitverwandlung hat den Zweck, für *denselben Ort und Zeitpunkt* die vier Stundenwinkel der mittleren Sonne, der wahren Sonne, des Frühlingspunktes und eines Sternes von der Rectascension α mit einander durch Gleichungen zu verbinden. Es wird sich zeigen, dafs je drei dieser Stundenwinkel durch den vierten gegeben sind.

Im Princip haben wir diese Aufgabe bereits gelöst mittels der Gleichungen (A) und III. in Nr. 84.; gilt die Winkelstunde als Einheit, so lauten dieselben:

$$\vartheta = (t + \alpha)^0_{24}, \quad t = (t' + \alpha' - \alpha)^0_{24}, \quad t' = (t + \alpha - \alpha')^0_{24}.$$

Auch im Folgenden soll die Stundeneinheit gelten und bedeuten:

$t_\odot$ den Stundenwinkel der wahren Sonne $\odot$,

t_m den Stundenwinkel der mittleren Sonne S_m,

ϑ den Stundenwinkel des Frühlingspunktes $\vee$,

ϑ_0 den Stundenwinkel des $\vee$ zur Zeit des letztverflossenen mittleren Ortsmittags,

$\vartheta_{0,0}$ den Stundenwinkel des $\vee$ zur Zeit des Greenwicher mittleren Mittags *vom gleichen Datum*,

t den Stundenwinkel eines Sterns von der AR α,

t_0 den Stundenwinkel desselben Sterns im letzt verflossenen mittleren Ortsmittag,

t' den Stundenwinkel eines Sterns von der AR α',

$\alpha_\odot$ die AR der $\odot$,

α_m die AR der S_m,

ω die Zeitgleichung $\alpha_\odot - \alpha_m$.

Unter dem *mittleren Mittag eines astronomischen Tages* soll stets dessen *Anfang*, *nicht sein Ende* verstanden werden.

Es werde für einen beliebigen Meridian M irgend ein astronomischer Tag D betrachtet. D ist alsdann das Zeitintervall

$$1^d \text{ M. Z.} = 24^h \text{ M. Z.}$$

Gemäfs Nr. 106. und 107. wird:

$$\begin{aligned} 24^h \text{ M. Z.} &= [24\,(1 + \varDelta\alpha)]^h \text{ St. Z.} \\ &= 1^d \text{ St. Z.} + (24\,\varDelta\alpha)^h \text{ St. Z.} \\ &= 1^d \text{ St. Z.} + [24\,\varDelta\alpha\,(1 - \delta\alpha)]^h \text{ M. Z.} \\ &= 1^d \text{ St. Z.} + (24\,\delta\alpha)^h \text{ M. Z.} \end{aligned}$$

Die Einführung der Untereinheiten liefert:

$$(24\,\varDelta\alpha)^h = 3^m\,56^s\,56, \qquad (24\,\delta\alpha)^h = 3^m\,55^s\,91,$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} 1^d \text{ M. Z.} &= 1^d \text{ St. Z.} + 3^m 56^s 56 \text{ St. Z.} \\ &= 1^d \text{ St. Z.} + 3^m 55^s 91 \text{ M. Z.} \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: es ist

1 mittlerer Tag $= 24^h 3^m 56^s 56$ Sternzeit
1 Sterntag $= 23^h 56^m 4^s 09$ mittlerer Zeit.

117. Es sei T ein Zeitpunkt der *ersten 24 Sternstunden* von D. Dieselben sind zu der mittleren Zeit $23^h 56^m 4^s 09$ abgelaufen.

Ist t der Stundenwinkel des Sternes α zur Zeit T, und war t_0 sein Stundenwinkel im Beginn des Tages D, so sind im Augenblick T seit dem letzten Mittag $(t - t_0)^0_{24}$ Sternstunden oder $(t - t_0)^0_{24}\,(1 - \delta\alpha)$ mittlere Stunden verflossen; also ist der Stundenwinkel t_m der S_m, d. h. die mittlere Zeit im Moment T, gegeben durch:

$$t_m = (t - t_0)^0_{24}\,(1 - \delta\alpha);$$

da

$$t = (\vartheta - \alpha)^0_{24}, \quad t_0 = (\vartheta_0 - \alpha)^0_{24}$$

ist, so kann man auch schreiben:

$$t_m = (\vartheta - \vartheta_0)^0_{24}\,(1 - \delta\alpha)$$

und

$$t_m = (t + \alpha - \vartheta_0)^0_{24}\,(1 - \delta\alpha).$$

Während der *letzten* $3^m 55^s 91$ M. Z. des Tages D nimmt der Stundenwinkel t der Reihe nach *dieselben* Werthe an, welche er während der *ersten* $3^m 55^s 91$ des Tages D durchlaufen hat. Es sind dies die zwischen t_0 und $t_0 + 24\,\varDelta\alpha = t_0 + 3^m 56^s 56$ gelegenen Werthe von t.

Ist T', bezw. T'' ein Zeitpunkt des ersten, bezw. des letzten Intervalls $3^m 55^s 91$ M. Z. von D, und sind beide Zeitpunkte durch 24 Sternstunden getrennt, so ist die mittlere Zeit im Moment T'' um $24\,(1 - \delta\alpha)$ mittlere Stunden gröfser, als im Moment T'. Bezeichnet also t'_m die nach den vorstehenden Formeln gegebene mittlere Zeit von T' und t''_m die mittlere Zeit von T'', so ist:

$$t''_m = t'_m + 24^h\,(1 - \delta\alpha) = (t'_m + 23^h\,56^m\,4^s\,09)\text{ M. Z.}$$

In praxi wird man nie im Zweifel sein, welcher der beiden Werthe t_m für einen zwischen t_0 und $t_0 + 3^m 56^s 56$ gelegenen Werth t zu wählen ist; denn die Zeitpunkte liegen nahezu um einen mittleren Tag aus einander.

Hat der Moment T die mittlere Zeit t_m, so sind seit dem mittleren Mittag $t_m\,(1 + \varDelta\alpha)$ Sternstunden verflossen. Es ist also:

$$t = [t_0 + t_m\,(1 + \varDelta\alpha)]^0_{24},$$
$$\vartheta = [\vartheta_0 + t_m\,(1 + \varDelta\alpha)]^0_{24},$$
$$t = [\vartheta_0 - \alpha + t_m\,(1 + \varDelta\alpha)]^0_{24}.$$

118. Setzt man in den Gleichungen (Nr. 116., Anfang)

$$t = (t' + \alpha' - \alpha)^0_{24},\quad t' = (t + \alpha - \alpha')^0_{24}:$$
$$\alpha' = \alpha_\odot,\quad \alpha = \alpha_m,\quad \alpha_\odot - \alpha_m = \omega,$$
$$t' = t_\odot,\quad t = t_m,$$

so entsteht:

$$t_m = (t_\odot + \omega)^0_{24},\quad t_\odot = (t_m - \omega)^0_{24}.$$

Man erhält also die mittlere Zeit eines Momentes T, indem man zu der wahren Zeit von T die in diesem Augenblick geltende Zeitgleichung ω *addirt;* umgekehrt wird durch *Subtraction* der Zeitgleichung von der mittleren Zeit die wahre Zeit erhalten.

119. Der Werth $\omega_{0,0}$ von ω ist für jeden *mittleren Mittag von Greenwich* im Voraus berechnet und aus den Ephemeriden zu entnehmen; desgleichen der Werth $\vartheta_{0,0}$ von ϑ. Es handelt sich beim Rechnen darum, aus diesen Werthen die für die mittlere Zeit t_m eines Ortes O geltenden Werthe von ω und ϑ abzuleiten.

Ist K das Kalenderdatum des Ortstages D, und hat O die westliche Länge λ_ω, bezw. die östliche Länge λ_ε, so liegt der mittlere Mittag des Greenwicher Tages K um λ_ω mittlere Stunden früher, bezw. um λ_ε mittlere Stunden später, als der mittlere Mittag von O. Bezeichnet $\delta\omega$ die stündliche Aenderung von ω

während des Greenwicher Tages K und $\omega_{0,0}$ den Werth von ω im mittleren Mittag von Greenwich, so ist:

$$\omega_0 = \omega_{0,0} + \lambda_\omega^h \delta\omega, \text{ bezw. } \omega_0 = \omega_{0,0} - \lambda_\varepsilon^h \delta\omega$$

die Zeitgleichung im Beginn des Ortstages K. Ist ω die Zeitgleichung für die mittlere Zeit t_m dieses Tages, so ist:

$$\omega = \omega_0 + t_m^h \delta\omega,$$

d. h. es ist:

$$\omega = \omega_{0,0} + (\lambda_\omega + t_m)^h \delta\omega, \text{ bezw. } \omega = \omega_{0,0} - (\lambda_\varepsilon - t_m)^h \delta\omega;$$

und nunmehr wird $t_\odot = (t_m - \omega)_{24}^0$.

Es ist stets in Erinnerung zu halten, dafs sowohl ω wie $\delta\omega$ positiv und negativ werden können. Die Extreme für ω sind $+ 14^m 31^s$ (Februar 12) und $- 16^m 18^s$ (November 3); ω wird vier Mal im Jahre $= 0$; annähernd: April 15, Juni 14, August 31, December 24. Der numerische Maximalwerth für $\delta\omega$ ist $1^s 25 = 0^h 0003472$; er ist gleichbedeutend mit der gröfsten Zeitdifferenz, welche zwischen einer mittleren und einer wahren Stunde statthaben kann. Man darf deshalb für denselben Tag die für die *mittlere* Stunde geltende Aenderung $\delta\omega$ der Zeitgleichung gleich der Aenderung von ω während einer Stunde *wahrer* Zeit setzen. Es wird dabei im schlimmsten Falle ein Fehler von $0^s 00043$ begangen.

120. Da die Rectascensionen von ☉ und S_m sich um den Betrag der Zeitgleichung unterscheiden, so culminiren beide Gestirne zu verschiedenen Zeiten; die Zeitgleichung wird also für jede der beiden Culminationen einen anderen Werth haben.

Es sei für irgend einen Tag und Ort ω_0, bezw. $\tilde{\omega}_0$ der Werth von ω im mittleren, bezw. wahren Mittag. Ist ω_0 *positiv*, so hat der Stundenkreis der ☉ im mittleren Mittag den östlichen Abstand ω_0 vom oberen Meridian. Es verfliefsen also noch ω_0 wahre Stunden bis zum wahren Mittag, und in dieser Zeit wächst ω von ω_0 auf $\omega_0 + \omega_0^h \delta\omega = \tilde{\omega}_0$. Zu derselben Gleichung gelangen wir, wenn ω_0 *negativ* ist.

In sehr vielen Fällen darf statt

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 + \omega_0^h \delta\omega$$

gesetzt werden:

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 \ldots;$$

denn das Product $\omega_0^h \delta \omega$ hat sein numerisches Maximum (Ende November) für $\omega = -12^m 34^s 9$, d. h. $\omega^h = -0^h 21$ und $\delta\omega = 0^s 81$; dann ist $\omega^h \delta \omega^s$ numerisch $= 0{,}21 . 0^s 81 = 0^s 1701$. Es kann sich also $\tilde{\omega}_0$ von ω_0 nie um mehr als $0^s 18$ unterscheiden.

Ist $t_\odot$ gegeben und ist $\tilde{\omega}_0 = \omega_0$ ... die Zeitgleichung, so wird:

$$\omega = \omega_0 + t_\odot \delta \omega.$$

Denn seit dem letzten wahren Mittag, wo $\omega = \tilde{\omega}_0 = \omega_0$ ... war, sind $t_\odot$ wahre Stunden verflossen, und deshalb ist das Wachsthum von ω gleich $t_\odot \delta \omega$. Führen wir wieder $\omega_{0,0}$ ein, so wird:

$$\omega = \omega_{0,0} + (\lambda_\omega + t_\odot)^h \delta \omega, \quad \text{bezw.} \quad \omega = \omega_{0,0} - (\lambda_\varepsilon - t_\odot)^h \delta \omega.$$

Schliefslich erhält man $t_m = (t_\odot + \omega)_{24}^0$.

Gebraucht man ω für den Vormittag eines *bürgerlichen* Tages K, so bestimmt man ω_0 für den mittleren Mittag von K. Je nachdem t_m oder $t_\odot$ gegeben ist, setzt man:

$$\tau_m = 24^h - t_m \quad \text{oder} \quad \tau_\odot = 24^h - t_\odot,$$

dann ist:

$$\omega = \omega_0 - \tau_m^h \delta \omega, \quad \text{bezw.} = \omega_0 - \tau_\odot^h \delta \omega.$$

121. Um ϑ_0, die Sternzeit im mittleren Mittag des Meridians M, zu finden, entnimmt man aus den Ephemeriden den Werth $\vartheta_{0,0}$ für den gegebenen Kalendertag. Da die Sternzeit im mittleren Mittag nichts anderes ist als die AR α_m der S_m in diesem Augenblick, so ändert sie sich in λ_ω, bezw. λ_ε mittleren Stunden um den Betrag $\lambda_\omega^h \Delta \alpha$, bezw. $\lambda_\varepsilon^h \Delta \alpha$, also ist:

$$\vartheta_0 = \vartheta_{0,0} + \lambda_\omega^h \Delta \alpha, \quad \text{bezw.} \quad \vartheta_0 = \vartheta_{0,0} - \lambda_\varepsilon^h \Delta \alpha.$$

Die Veränderlichkeit der Sonnendeclination, die Erdregionen und die Jahreszeiten.

122. Es ist bereits darauf hingewiesen worden, dafs die Veränderlichkeit der Sonnendeclination einen Kreislauf bestimmter Naturerscheinungen innerhalb eines tropischen Jahres zur Folge hat. Wir müssen nun etwas näher auf diese Zusammenhänge eingehen.

Die ☉ bewegt sich während eines tropischen Jahres östlich durch die Ekliptik; sie nimmt also successive die Declinationen aller Ekliptikpunkte an. Die Declination jedes Aequinoctiums ist gleich Null, weil ♈ und ♎ Aequatorpunkte sind. Auf dem Wege

vom ♈ zu dem ♎ sind alle Declinationen positiv, vom ♎ zum ♈ negativ. Bedeutet ε die Schiefe der Ekliptik, so wachsen die numerischen Werthe der Declination von einem Aequinoctium zu dem nächsten Solstiz von 0 auf ε, und von einem Solstiz zu dem nächsten Aequinoctium fallen sie von ε auf 0. Die Solstitien liegen auf der Polare der Aequinoctien, der Schnittpunkte von Aequator und Ekliptik. Folglich ist (Nr. 38., 39.) die Neigung ε dieser beiden Kreise gleich dem Aequatorabstand jedes Solstitiums, und die Aequatorabstände aller übrigen Ekliptikpunkte müssen kleiner sein als ε.

Im Jahre 1750 war $\varepsilon = 23^0\,28'\,18{,}0''$.
Im Jahre 1850 war $\varepsilon = 23^0\,27'\,29{,}4''$.

Die jährliche Abnahme betrug also $0{,}48''$... Nach theoretischen Ueberlegungen wird die Abnahme der Ekliptikschiefe noch bis gegen das Jahr 6000 währen, woselbst ein Minimum von $22^0\,54'$ erreicht sein wird.

123. Wir wollen jetzt Gebrauch machen von dem verschiedenen Verhalten eines Sternes der Declination δ gegen einen Horizont des Zenits φ, je nachdem $\varphi\delta$ plus oder minus ist, und je nachdem

$$(\varphi) + (\delta) > 90^0, \quad (\varphi) + (\delta) = 90^0, \quad (\varphi) + (\delta) < 90^0$$

ist (s. Nr. 92.).

Wenn $(\varphi) + (\delta) = 90^0$ und $\varphi\delta$ plus ist, so ist das Gestirn ein *Cp-Stern*, dessen *U. C. im Horizont* liegt, und ein *echter Cp-Stern* für alle Zenite φ', welche auf der *Polseite des Parallels* φ liegen. Denn alsdann ist $(\varphi') > (\varphi)$, also $(\varphi') + (\delta) > 90^0$. Ferner ist dasselbe Gestirn ein *gleichstimmiger A U-Stern* (Tagbogen gröfser als Nachtbogen) für alle Zenite φ'', welche auf der *Aequatorseite des Parallels* φ liegen; denn alsdann ist $(\varphi'') < (\varphi)$, also $(\varphi'') + (\delta) < 90^0$.

Wenn $(\varphi) + (\delta) = 90^0$ und $\varphi\delta$ minus ist, so ist das Gestirn ein *Un-Stern*, dessen *O. C. im Horizont* liegt; es ist ein *echter Un-Stern* für die auf der *Polseite des Parallels* φ gelegenen Zenite und ein *ungleichstimmiger A U-Stern* (Nachtbogen gröfser als Tagbogen) für die auf der *Aequatorseite des Parallels* φ gelegenen Zenite.

124. Hierauf läfst sich nun eine Eintheilung des Erdsphäroids in Regionen und Zonen gründen, wenn δ die veränderliche Declination der $\odot$ bedeutet.

Unter einem *Breitekreis* oder *Erdparallel* φ soll der Parallel des Erdsphäroids verstanden werden, dessen Orte die geographische Breite φ besitzen. Diese Orte müssen auf einem *Kreise* liegen, weil die geocentrische Normale der Aequatorebene gleichzeitig die Rotationsaxe des Erdsphäroids ist.

Jeder nördliche oder südliche Erdparallel φ zerlegt die Erdhälfte, welcher er angehört, in eine Zone und eine Calotte; letztere soll als Erdcalotte φ bezeichnet werden. Die Zenite ihrer Orte liegen auf der Calotte φ der Himmelskugel.

Die Parallele $+ \varepsilon$, $- \varepsilon$ sowohl der Himmelskugel wie des Erdsphäroids heifsen deren *Wendekreise*; der *nördliche*, bezw. *südliche* wird auch als der *Wendekreis des Krebses*, bezw. *des Steinbocks* bezeichnet.

Analog heifsen die Parallele $+ (90^0 - \varepsilon)$, $- (90^0 - \varepsilon)$ der *nördliche* oder *arktische*, der *südliche* oder *antarktische Polarkreis;* ihre Calotten heifsen die *Polarregionen* und werden entsprechend als *arktisches* und *antarktisches Gebiet* unterschieden.

Soll für die Declination der $\odot$ und ein Zenit φ die Bedingung erfüllt sein $(\varphi) + (\delta) = 90^0$, so mufs (φ) zwischen 90^0 und $90^0 - \varepsilon$ liegen; denn (δ) liegt zwischen 0 und ε, und es wird $(\varphi) = 90^0$ für $(\delta) = 0$, $(\varphi) = 90^0 - \varepsilon$ für $(\delta) = \varepsilon$.

Die Erdorte, für deren Horizonte die $\odot$ Cp-Stern und Un-Stern werden kann, sind also die Orte der beiden Polarregionen.

Jedes Zenit des arktischen oder antarktischen Gebietes besitzt einen bestimmten Bogenabstand $\varkappa$ von dem gleichnamigen Polarkreis. Bezeichnen wir ein solches Zenit und die geographische Breite seines Ortes mit $\varphi_\varkappa = + (\varphi_\varkappa)$, bezw. $- (\varphi_\varkappa)$, so ist

$$(\varphi_\varkappa) = 90^0 - \varepsilon + \varkappa \text{ und } \varepsilon - \varkappa = 90^0 - (\varphi_\varkappa);$$

d. h. wenn die $\odot$ den Aequatorabstand $(\delta) = \varepsilon - \varkappa$ erhält, so liegt ihre O. C., bezw. ihre U. C. in dem Horizont des Ortes $\varphi_\varkappa$, je nachdem $\varphi\,\delta$ plus oder minus ist.

Wir wollen das veränderliche Verhalten der $\odot$ gegen den Horizont eines arktischen Ortes $+ (\varphi_\varkappa)$ während eines tropischen Jahres verfolgen. Dabei sollen unter Frühlings-, Sommers-, Herbst-,

Wintersanfang die Zeitpunkte verstanden werden, in denen die ⊙ die Declination ∓ 0, $+ \varepsilon$, ± 0, $- \varepsilon$ annimmt.

Im Frühlingsanfang steht die ⊙ im Aequator, und es wird $(\varphi_x) + (\delta) = (\varphi_x) < 90^0$, weil $\delta = 0$ ist. Die ⊙ ist also *A U-Stern*, und zwar mufs der Tagbogen *gleich* dem Nachtbogen sein (*Tag- und Nachtgleiche*); denn der Sonnenparallel ist alsdann der Aequator, und letzterer wird vom Horizont in Halbkreise zerlegt.

In der Zeit zwischen Frühlings- und Herbstanfang ist $\varphi_x \delta$ plus, und bis zum Sommersanfang wächst der nördliche Aequatorabstand der ⊙ von 0 auf ε. Dabei erreicht sie in einem bestimmten Zeitpunkt $T_{x,1}$ den Abstand $\varepsilon - x$, d. h. es wird $\delta = + (\varepsilon - x)$. In dem zwischen Frühlingsanfang und $T_{x,1}$ gelegenen Zeitintervall ist $(\varphi_x) + (\delta) < 90^0$, die ⊙ ist also *gleichstimmiger A U-Stern, dessen Tagesbogen ununterbrochen wächst,* und für $\delta = + (\varepsilon - x)$ in einen *Kreis* übergeht. Im Augenblick $T_{x,1}$ ist die ⊙ *Cp-Stern geworden mit der U. C. im Horizont.*

In der nun folgenden Zeit bleibt die ⊙ so lange *Cp-Stern,* als ihr Aequatorabstand $(\delta) > \varepsilon - x$ bleibt; denn so lange bleibt $(\varphi_x) + (\delta) > 90^0$. In dieser Zeit wächst (δ) bis ε (Sommersanfang), nimmt dann ab und erreicht im Zeitpunkt $T_{x,2}$ zum zweiten Male den Werth $\varepsilon - x$.

Es folgt die letzte Periode, in welcher $\varphi_x \delta$ plus ist; sie liegt zwischen $T_{x,2}$ und Herbstanfang; hier ist $(\varphi_x) + (\delta) < 90^0$; die ⊙ wird wieder *gleichstimmiger A U-Stern,* dessen Tagesbogen aus einem Kreis in einen Halbkreis übergeht: die Tage werden kürzer, und im Herbstanfang tritt *Tag- und Nachtgleiche* ein.

Für die zweite Hälfte des tropischen Jahres, zwischen Herbstanfang und dem nächsten Frühlingsanfang, ist $\varphi_x \delta$ minus. Die ⊙ wird *ungleichstimmiger A U-Stern* bis zu dem Zeitpunkte $T'_{x,1}$, wo $\delta = - (\varepsilon - x)$ geworden ist; für diesen Werth von δ ist $(\varphi_x) + (\delta) = 90^0$, d. h. die ⊙ wird *Un-Stern mit O. C. im Horizont.*

In der nun folgenden Zeit bleibt die ⊙ so lange *Un-Stern,* als $(\delta) > \varepsilon - x$ bleibt, weil dann stets $(\varphi_x) + (\delta) > 90^0$ ist. Der südliche Aequatorabstand erreicht sein Maximum ε im Wintersanfang und erhält im Zeitpunkt $T'_{x,2}$ wiederum den Werth $\varepsilon - x$. Die *O. C. liegt alsdann im Horizont.* Es folgt die letzte Periode, in welcher $(\varphi_x) + (\delta) < 90^0$ ist, die ⊙ also *ungleichstimmiger A U-Stern*; der Tagbogen wächst allmählich, bis im nächsten

Frühlingsanfang *Tag- und Nachtgleiche* eintritt und der Kreislauf von Neuem beginnt.

Die Betrachtung für ein südliches Polarzenit — $(\varphi_\varkappa)$ wird durchaus analog ausgeführt; als Anfang des tropischen Jahres wird der Herbstanfang genommen.

Verstehen wir wie immer unter gleichstimmigen Elementen solche, welche auf derselben Seite des Aequators liegen, und unter ungleichstimmigen Elementen solche, welche durch den Aequator getrennt sind, so lautet unser Resultat:

Hat das Zenit eines Polarortes den Abstand $\varkappa$ von dem gleichstimmigen Polarkreis, so wird die ⨀, so lange sie der gleichstimmigen Halbkugel angehört, Cp-Stern zwischen dem Wendekreise und dem Parallel $(\varepsilon - \varkappa)$ der letzteren und gleichstimmiger A U-Stern zwischen diesem Parallel und dem Aequator. Dagegen wird die ⨀, so lange sie der ungleichstimmigen Halbkugel angehört, ungleichstimmiger A U-Stern zwischen dem Aequator und dem Parallel $(\varepsilon - \varkappa)$ der letzteren und Un-Stern zwischen diesem Parallel und dem Wendekreise seiner Halbkugel.

Die Parallele $(\varepsilon - \varkappa)$ haben von den gleichstimmigen Wendekreisen ε den Abstand $\varkappa$. Je gröfser $\varkappa$ wird, um so näher rückt das Zenit $\varphi_\varkappa$ an den gleichstimmigen Himmelspol und um so breiter werden die Zonen, auf welchen die ⨀ Cp- und Un-Stern wird. Je näher also ein Erdort seinem gleichstimmigen Pole liegt, um so länger wird das Zeitintervall werden, in welchem die ⨀ nicht untergeht, bezw. nicht aufgeht; entsprechend kürzer werden dann die Zeitintervalle zwischen der Lichtperiode und der Dunkelperiode.

Für die Pole erreicht $\varkappa$ sein Maximum ε, und $\varepsilon - \varkappa$ sein Minimum 0; dann zerfällt das tropische Jahr in einen halbjährigen Lichttag und in eine halbjährige Nacht.

Wegen der Strahlenbrechung ist die ⨀ *bereits* oder *noch* sichtbar, wenn sie nicht tiefer als etwa 35′ unter dem Horizont steht. Das hat zur Folge, dafs die Periode, in welcher wir die ⨀ über dem Horizont eines Polarortes erblicken, länger wird, als angegeben, d. h. *vor* dem Zeitpunkt $T_{\varkappa,1}$ beginnt und *nach* dem Zeitpunkt $T_{\varkappa,2}$ endet; und dafs die Polarnacht kürzer wird, d. h. später einsetzt als zur Zeit $T'_{\varkappa,1}$ und früher aufhört, als zur Zeit $T'_{\varkappa,2}$.

Die zwischen dem Polar- und Wendekreise jeder Erdhälfte gelegene Zone heiſst die *nördliche*, bezw. *südliche gemäſsigte Zone.* Die geographischen Breiten ihrer Orte liegen zwischen ε und $90^0 - \varepsilon$, bezw. zwischen $-\varepsilon$ und $-(90^0 - \varepsilon)$. Für *alle* Werthe, welche die Declination der ⊙ annehmen kann, ist also *stets* $(\varphi) + (\delta) < 90^0$; d. h. für die Orte der gemäſsigten Zonen ist die ⊙ *stets Auf- und Untergangsstern, und zwar sowohl gleichstimmiger wie auch ungleichstimmiger*, weil $\varphi\,\delta$ sowohl plus wie minus wird.

Ferner *culminirt* die Sonne für die Orte der *Polarregionen und der gemäſsigten Zonen* auf der *Aequatorseite* des Zenits, also für die *nördlichen* Orte im *Süden* und für die *südlichen Orte* im *Norden.*

Die ⊙ erhält ihre kleinste Meridianzenitdistanz ζ_μ (Nr. 88.), also die gröſste Mittagshöhe für nördlichen Ort, wenn $\delta = +\varepsilon$ wird; dagegen die gröſste Zenitdistanz ζ_μ, also die kleinste Mittagshöhe, wenn $\delta = -\varepsilon$ wird. Denn für $\delta = +\varepsilon$ wird $\zeta_\mu = \varphi - \varepsilon$, die Mittagshöhe $= 90^0 - (\varphi - \varepsilon)$ und für $\delta = -\varepsilon$ wird $\zeta_\mu = \varphi + \varepsilon$, die Mittagshöhe $= 90^0 - (\varphi + \varepsilon)$.

Für die südlichen Orte tritt die gröſste Mittagshöhe ein, wenn $\delta = -\varepsilon$, die kleinste, wenn $\delta = +\varepsilon$ wird.

125. Je gröſser die Mittagshöhe der ⊙ ist, um so steiler fallen ihre Strahlen ein, um so kürzer ist deren Weg durch die Atmosphäre, um so geringer ist die Absorption, um so intensiver ist die Licht- und Wärmewirkung der ⊙. In der That wird für die Orte der Polarregionen und gemäſsigten Zonen der Einfluſs der veränderlichen Sonnendeclination und der davon abhängigen veränderlichen Mittagshöhe der ⊙ auf das Lebhafteste von den Menschen empfunden; ebenso die gleichfalls damit verbundene Aenderung in der Gröſse des Tagbogens, durch welche die Dauer der Lichtspendung bestimmt wird.

Die Mittagshöhe ist gegeben durch $90^0 - (\varphi \sim \delta)$, wenn $\varphi \sim \delta$ den numerischen Werth von $\varphi - \delta$ bedeutet. Sie ändert sich also mit der veränderlichen Sonnendeclination δ. Deshalb knüpft sich an den jährlichen Verlauf von δ der Wechsel der Lebensbedingungen, dem wir jahraus jahrein unterworfen sind. So entstand die Eintheilung des Jahres in *Jahreszeiten*, innerhalb

deren die Declination der ⊙ ein bestimmtes Werthgebiet ihrer zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ gelegenen Declinationen durchläuft.

Die Grenzen der Jahreszeiten sind für alle Orte der *Polarregionen* wie der *gemäfsigten Zonen* durch die Zeitpunkte gegeben, in denen die ⊙ durch den ♈ ($\delta = 0$), das Nordsolstiz ($\delta = +\varepsilon$), den ♎ ($\delta = 0$), das Südsolstiz ($\delta = -\varepsilon$) tritt. Die Zeitintervalle, während deren die ⊙ die Ekliptikquadranten ♈ Nordsolstiz, Nordsolstiz ♎, ♎ Südsolstiz, Südsolstiz ♈ beschreibt, heifsen *Frühling*, *Sommer*, *Herbst*, *Winter* für einen *nördlichen Erdort* und *Herbst*, *Winter*, *Frühling*, *Sommer* für einen *südlichen Erdort.*

In beiden Fällen beginnt der *Sommer* mit der *gröfsten*, der *Winter* mit der *kleinsten Mittagshöhe.*

Im Durchschnitt tritt die ⊙ am 21. März durch den ♈, am 21. Juni durch das Nordsolstiz S_n, am 23. September durch den ♎ und am 21. December durch das Südsolstiz S_s.

Gegenwärtig durchläuft die ⊙ die Ekliptikquadranten $\widehat{♈ S_n}$ in $92^d\,22^h$, $\widehat{S_n ♎}$ in $93^d\,14^h$, $\widehat{♎ S_s}$ in $89^d\,17^h$, $\widehat{S_s ♈}$ in $89^d\,1^h$. Für einen nördlichen Erdort ist also das Zeitintervall *Frühling* + *Sommer* (*nördliches Sommersemester* und *südliches Wintersemester*) um 1 Woche und 18 Stunden länger als das Zeitintervall *Herbst* + *Winter* (*nördliches Wintersemester* und *südliches Sommersemester*); oder mit anderen Worten: *gegenwärtig verweilt die* ⊙ *länger auf der nördlichen, als auf der südlichen Himmelshemisphäre.* Dieses Verhältnifs mufs sich mit der Zeit umkehren, weil die Rectascension des Perihels jährlich um 61″ wächst.

126. Die *Wendekreise* der Himmelskugel haben diesen Namen deshalb erhalten, weil der Parallel der ⊙ nach der Coincidenz mit einem Wendekreise seinen Abstand vom Aequator nicht länger vergröfsert, sondern sich wieder zum Aequator zurückwendet. Der griechische Name für Wendekreis ist τροπη, Plural τροπαι, daher auch der Name *Tropen* für beide Himmelsparallele. Als Erdparallele begrenzen die Wendekreise auf dem Sphäroid die sogenannte *Tropenzone.*

Die Werthe der geographischen Breiten von Tropenorten liegen also zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$. Deshalb erfüllt ein Tropenzenit φ für jeden Werth δ der Sonnendeclination die Bedingungen

$$(\varphi) < \varepsilon \quad \text{und} \quad (\varphi) + (\delta) < 90^\circ,$$

d. h. die ⊙ ist stets *Auf- und Untergangsgestirn* und mufs zweimal durch jedes nördliche, bezw. südliche Zenit treten, so lange sie sich auf der nördlichen, bezw. südlichen Ekliptikhälfte befindet; nämlich einmal *vor* dem Erreichen des gleichnamigen Wendekreises und das andere Mal um ebenso viel später *nach* dem Erreichen desselben. Denn zwischen Aequator und demselben Wendekreise nimmt δ zweimal den Werth φ an, wenn $(\varphi) < \varepsilon$ ist. Die ⊙ steht also *zwei Mal im Jahre scheitelrecht über jedem Tropenort.* Die beiden Zeitpunkte des Zenitstandes fallen für einen nördlichen, bezw. südlichen Tropenort in das nördliche, bezw. südliche Sommersemester. Das zwischen beiden Zenitständen gelegene Zeitintervall wird durch den Beginn des entsprechenden Sommers halbirt. Dieses Zeitintervall ist um so kürzer, je näher der Tropenort dem gleichnamigen Wendekreise liegt. Für $(\varphi) = \varepsilon$ reducirt es sich auf das Zeitelement des Sommeranfangs und wächst, bis es für $\varphi = 0$ identisch mit dem entsprechenden Sommersemester selbst wird.

Der Begriff der vier Jahreszeiten läfst sich auf Tropenorte nicht anwenden, weil es *zwei* höchste Sonnenstände für diese im Jahre gibt, wohl aber der Begriff des Sommer- und Wintersemesters. Dieselben beginnen und enden mit den Durchtritten der Sonne durch die Aequinoctien. Als Sommersemester oder *heifse und Regenzeit* ist dasjenige Semester zu betrachten, in welches *die Zenitstände der Sonne* fallen; als Wintersemester oder *kühlere, regenarme, oft an Trübungen reiche Zeit* dasjenige Semester, in welchem die *Mittagshöhe* der Sonne ihr Minimum hat.

Fünfter Abschnitt.

Die sphärischen Dreiecke und ihre Eintheilung. Sphärische Trigonometrie. Allgemeingiltigkeit der Grundformeln für die Gesammtheit der sphärischen Dreiecke. Anwendung auf das astronomische Dreieck.

Das sphärische Grunddreieck dreier beliebigen Kugelpunkte ABC und die zugeordnete körperliche Ecke.

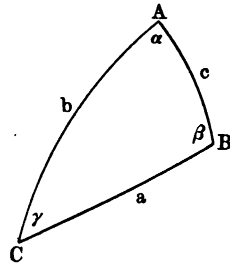
127. Die meisten Aufgaben, welche bei astronomisch-geographischen Ortsbestimmungen vorkommen, werden mittels der sphärischen Trigonometrie gelöst. Letztere liefert einfache Gleichungen zwischen den Coordinaten eines Zenits und eines Sterns in Bezug auf unsere verschiedenen sphärischen Coordinatensysteme. Aber die Einfachheit kommt nur dadurch zu Stande, daſs *an Stelle der Werthe selbst die Werthe ihrer trigonometrischen Functionen treten:* Sinus und Cosinus, Tangens und Cotangens, Secans und Cosecans.

Eine sichere Handhabung der wichtigsten abzuleitenden Grundformeln ist unumgängliches Erfordernifs, und Uebung im Rechnen mit diesen Formeln, d. h. im Umformen und Combiniren derselben, kann nicht genug empfohlen werden.

Wenn wir durch je zwei von drei Kugelpunkten ABC die Bogen ihrer sphärischen Abstände (stets kleiner als 180^{0}) legen,

so nennen wir die entstandene Figur das *sphärische Grunddreieck* ABC und A, B, C seine *Ecken*. Die Bogen $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ heifsen die *Seiten*. Ihre Werthe sollen beziehungsweise mit c, a, b bezeichnet werden. Jede Ecke bildet mit ihrem Gegenpunkt auf der Kugel die *Scheitel eines sphärischen Winkels*, dessen Schenkel durch die beiden anderen Ecken gehen. Diese drei Winkel, deren gemeinsames Stück das Dreieck ABC ist, heifsen schlechtweg die *Winkel des Dreiecks*, und wir wollen ihre Werthe beziehungsweise mit α, β, γ bezeichnen, entsprechend ihren Scheiteln A, B, C. Die drei Seiten a, b, c und die drei Winkel α, β, γ heifsen die sechs Stücke des Dreiecks; man nennt a, α; b, β; c, γ *gegenüberliegende* Stücke und a, β; a, γ; b, γ; b, α; c, α; c, β *anliegende Stücke*.

Fig. 33.



128. Legt man vom Mittelpunkt O der Kugel die *drei Strahlen* a', b', c' durch die Ecken A, B, C des Dreiecks, so bilden diese die *Kanten* der zugeordneten „*körperlichen Ecke*". O heifst ihr *Scheitel*, und die Concavwinkel der Strahlenpaare $a'b'$, $b'c'$, $c'a'$ mit den Werthen c, a, b heifsen ihre *Seiten*. Offenbar sind die *Concavwinkel* a, b, c den *Dreieckseiten* a, b, c zugeordnet; ihre Werthe sind also paarweise einander gleich für conforme Einheiten und werden deshalb durch dieselben Buchstaben bezeichnet.

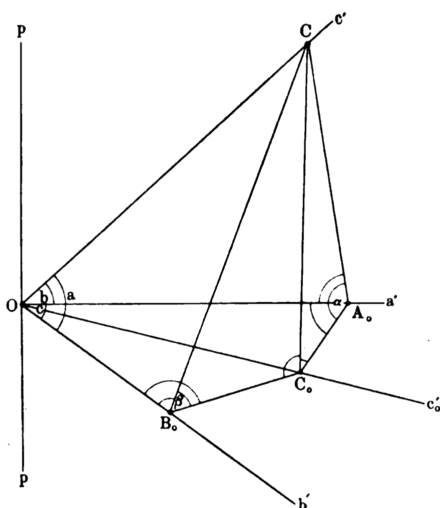
Jede Kante der Ecke bildet mit ihrem Gegenstrahl die *Kante eines Raumwinkels*, dessen Flügel durch die beiden anderen Kanten der körperlichen Ecke gehen. Diese drei Winkel, denen allen die Ecke gemeinsam ist, heifsen schlechtweg die *Winkel der körperlichen Ecke*, und wir wollen ihre Werthe beziehungsweise mit α, β, γ bezeichnen, entsprechend ihren Kanten a', b', c'. Offenbar sind die *Raumwinkel* α, β, γ den *Kugelwinkeln* α, β, γ *zugeordnet*, haben also paarweise gleiche Werthe für conforme Einheiten.

Wäre man umgekehrt von einer körperlichen Ecke ausgegangen, so würde dieselbe auf jeder, ihrem Scheitel concentrischen Kugel ein *zugeordnetes sphärisches Dreieck* geliefert haben.

Anwendung der Trigonometrie auf rechtwinklige ebene Dreiecke, welche durch eine körperliche Ecke geliefert werden.

129. Eine körperliche Ecke (Fig. 34) soll nun zunächst mit der Beschränkung betrachtet werden, dafs ihr Concavwinkel (a', b'), d. h. die Seite c, *spitz* ist, und dafs die *Projection* c'_0 *der Kante* c' auf Ebene (a', b') *in die Seite* c fällt. Durch den Scheitel O wird die Normale p der Ebene (a', b') gelegt; p als Kante bestimmt mit c' einen Flügel, welcher der Voraussetzung nach die Seite $(a' b')$ unserer Ecke schneidet; denn dieser Schnitt ist identisch mit dem Strahl c'_0.

Fig. 34.



Auf der Kante c' wird ein Punkt C fixirt und $\overline{OC}$ als Streckeneinheit festgesetzt, so dafs Länge $\overline{OC} = 1$ ist. Bedeutet C_0 den Fufspunkt des von C auf Ebene (a', b') gefällten Lothes, so liegt C_0 auf der Projection c'_0. Durch C wird sowohl die Normalebene zu Kante a' wie die Normalebene zu Kante b' gelegt; die Schnittgerade beider liegt also normal zu Ebene (a', b') und geht durch C_0, d. h. sie ist die Gerade $C C_0$. Die Normalebene zur Kante a' schneide die letztere im Punkte A_0; dann ist $A_0 C_0$ eine Gerade der Normalebene von a', d. h. Gerade $A_0 C_0$ und Kante a' liegen normal.

Analog folgt, wenn B_0 den Schnittpunkt der Normalebene von Kante b' mit der letzteren bezeichnet: Gerade $B_0 C_0$ und Kante b' liegen normal.

Da $C A_0$ eine Gerade der Normalebene von a' ist, so liegen $C A_0$ und a' normal; aus analogem Grunde liegen $C B_0$ und b' normal.

$C_0 A_0$ und $C_0 B_0$ liegen in der Ebene (a', b'), und $C C_0$ ist

eine Normale derselben; also liegen $C_0 C$ und $C_0 A_0$ normal, ebenso $C_0 C$ und $C_0 B_0$.

Es folgt daraus, dafs die in Fig. 34 durch einen kleinen Bogen *ohne Benennung* gekennzeichneten sechs Winkel *rechte* Winkel sind.

Da der ebene Winkel $C_0 A_0 C$ in der durch A_0 bestimmten Normalebene von a' liegt, so ist er dem Raumwinkel α zugeordnet, dessen Kante durch Strahl a' gegeben ist, und dessen Flügel beziehungsweise durch C_0 und C gehen; also ist α der Werth des ebenen Winkels $C_0 A_0 C$. Analog folgt, dafs β der Werth des ebenen Winkels $C_0 B_0 C$ ist.

Die vier rechtwinkligen Dreiecke, deren Hypotenusen von C ausgehen, liefern Folgendes:

das bei A_0 rechtwinklige Dreieck $O A_0 C$:

$$\overline{C A_0} = \sin b, \quad \overline{O A_0} = \cos b,$$

das bei B_0 rechtwinklige Dreieck $O B_0 C$:

$$\overline{C B_0} = \sin a, \quad \overline{O B_0} = \cos a,$$

das bei C_0 rechtwinklige Dreieck $C C_0 A_0$:

$$\overline{C C_0} = \overline{C A_0} \sin \alpha, \quad \overline{A_0 C_0} = \overline{C A_0} \cos \alpha,$$

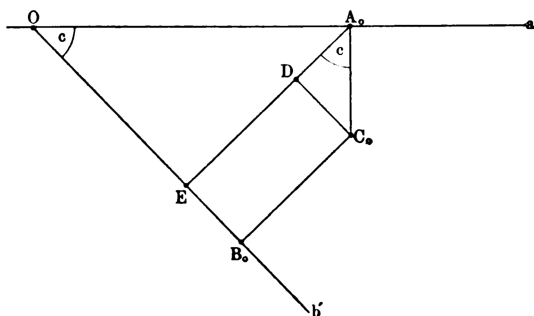
das bei C_0 rechtwinklige Dreieck $C C_0 B_0$:

$$\overline{C C_0} = \overline{C B_0} \sin \beta, \quad \overline{B_0 C_0} = \overline{C B_0} \cos \beta.$$

Hieraus folgt:

$$\overline{C C_0} = \sin b \; \sin \alpha = \sin a \; \sin \beta,$$
$$\overline{A_0 C_0} = \sin b \; \cos \alpha,$$
$$\overline{B_0 C_0} = \sin a \; \cos \beta.$$

Fig. 35.



In Fig. 35 ist Viereck $O A_0 C_0 B_0$ ohne Perspective in der Ebene des Papiers dargestellt. Von A_0 ist das Loth $\overline{A_0 E}$ auf Kante b' gefällt, von C_0 das Loth $\overline{C_0 D}$ auf $A_0 E$.

Fig. 35 liefert demnach:

$$\overline{OB_0} = \cos a = \overline{OE} + \overline{EB_0} = \overline{OE} + \overline{DC_0},$$
$$\overline{OE} = \overline{OA_0} \cos c = \cos b \cos c,$$
$$\overline{DC_0} = \overline{A_0 C_0} \sin c = \cos \alpha \sin b \sin c,$$

also:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Ferner:

$$\overline{A_0 E} = \overline{A_0 D} + \overline{DE} = \overline{A_0 D} + \overline{B_0 C_0}$$
$$\overline{A_0 E} = \overline{OA_0} \sin c = \cos b \sin c$$
$$\overline{A_0 D} = \overline{A_0 C_0} \cos c = \cos \alpha \sin b \cos c$$
$$\overline{B_0 C_0} = \sin a \cos \beta,$$

also:

$$\cos b \sin c = \cos \alpha \sin b \cos c + \sin a \cos \beta,$$

oder:

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha.$$

130. Die angestellte geometrische Betrachtung hat das Resultat geliefert:

$$(A) \qquad \begin{aligned} \sin a \sin \beta &= \sin b \sin \alpha \\ \sin a \cos \beta &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha. \end{aligned}$$

Die Fig. 35 ist dadurch entstanden, dafs von A_0 auf b' ein Loth und auf dieses von C_0 ein zweites Loth gefällt wurde. Fällt man statt dessen von B_0 auf a' ein Loth, auf dieses von C_0 ein zweites Loth und stellt man für die neue Figur dieselbe Betrachtung an, wie für Fig. 35, so können sich die neuen Resultate von den alten nur dadurch unterscheiden, dafs b mit a, β mit α vertauscht ist.

Aus den letzten beiden Gleichungen von (A) folgen deshalb die Gleichungen:

$$(B) \qquad \begin{aligned} \sin b \cos \alpha &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta, \end{aligned}$$

so dafs die Betrachtung der körperlichen Ecke im Ganzen fünf Gleichungen geliefert hat. Dieselben bleiben unverändert, wenn in ihnen gleichzeitig a und b, α und β mit einander vertauscht werden.

Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie.

131. Wird um den Scheitel O unserer körperlichen Ecke eine Kugel von beliebigem Radius gelegt, so liefern die Schnittpunkte $A B C$ der Kanten $a' b' c'$ das der körperlichen Ecke zugeordnete sphärische Grunddreieck $A B C$.

Für dieses gelten die Gleichungen (A) und (B) ohne weiteres, weil die gleichlautenden Stücke einander zugeordnet sind (Nr. 38., 39.). Die Seiten $a b c$ der Ecke sind also der Reihe nach gleich den Seiten des Kugeldreiecks; analoges gilt für die Winkel $\alpha \beta \gamma$.

Wir nennen

$$(A) \qquad \begin{aligned} \sin a \sin \beta &= \sin b \sin \alpha \\ \sin a \cos \beta &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \end{aligned}$$

$$(B) \qquad \begin{aligned} \sin b \cos \alpha &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta \end{aligned}$$

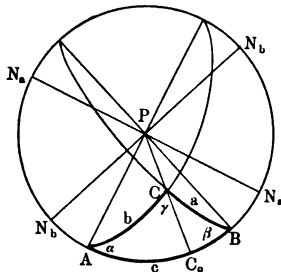
die *Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie.*

Dieselben gelten zunächst nur für das der betrachteten Ecke zugeordnete Dreieck. Es wird aber der Beweis erbracht werden, dafs sie für *alle* überhaupt existirenden Dreiecke gelten.

132. Das Kugeldreieck $A B C$ kann aufgefafst werden als ein Theil derjenigen, durch Kreis (A, B) bestimmten Halbkugel, welche den Punkt C enthält. In diesem Sinne soll die Seite $\widehat{AB} = c$ als *Basis* und die gegenüberliegende Ecke C als *Scheitel* oder *Spitze des Dreiecks* $A B C$ bezeichnet werden.

Es sei P derjenige Pol des Kreises (A, B), welcher den Scheitel unserer Halbkugel liefert (Nr. 41.). Letztere wird durch die nebenstehende Fig. 36 dargestellt, von oben gesehen, so dafs die durch P gelegten Halbkreise der Kugel als geradlinige Strecken erscheinen.

Fig. 36.



Jeder Bogen zwischen P und einem Punkte seiner Polare, d. h. des Kreises (A, B), ist ein Quadrant und liegt normal zu dem Kreise. Die Polare von A geht durch P; ihr auf der Halbkugel verlaufender

Halbkreis ist $N_a P N_a$; analog ist $N_b P N_b$ der Halbkreis, welcher der Polare von B angehört.

Ein von A ausgehender Bogen der Halbkugel wird kleiner als ein Quadrant sein, wenn er die Polare $N_a P N_a$ von A *nicht* schneidet, und gröfser als ein Quadrant, *wenn* er sie schneidet. Ein Winkel, dessen Scheitel A ist und dessen einer sphärischer Schenkel in den Kreis (A, B) fällt, wird spitz sein, wenn er den Bogen $\widehat{AP}$ *nicht* enthält, und stumpf, *wenn* er ihn enthält. Analoges gilt für die Ecke B und ihre Polare $N_b P N_b$.

Hierdurch ist ein Mittel gegeben, um zu entscheiden, *welche* Winkel und Bogen eines sphärischen Dreiecks mit der Basis $\widehat{AB}$ *spitz* und welche *stumpf* sind. Der Ausdruck „spitzer Bogen" bedeutet einen Bogen, welcher kleiner als ein Quadrant ist, und „stumpfer Bogen" einen Bogen, welcher gröfser als ein Quadrant und kleiner als zwei Quadranten ist.

Ist ein Bogen, bezw. ein Winkel *spitz*, so soll dies mit i bezeichnet werden, dagegen mit u, wenn er *stumpf* ist.

Das sphärische Dreieck ABC der Fig. 36 ist offenbar einer körperlichen Ecke zugeordnet, für welche die Fundamentalgleichungen gelten. Denn es ist $\widehat{AB}$ spitz, entsprechend dem spitzen Winkel der Kanten $a'\,b'$; und es schneidet das auf Kreis (A, B) gefällte sphärische Loth $\widehat{CC_0}$ die Dreieckseite $\widehat{AB}$.

Für jedes Kugeldreieck der Basis $\widehat{AB}$ mit einer im Sector ABP gelegenen Spitze C ist:

a	b	c	α	β
i	i	i	i	i,

wo das i aussagt, dafs der darüber stehende Bogen oder Winkel spitz ist. Aber γ kann alle Werthe zwischen c und 180^0 annehmen, also spitz, stumpf oder gleich einem Rechten werden, weil c spitz ist. Die Fundamentalgleichungen gelten daher für die beiden Dreiecksklassen:

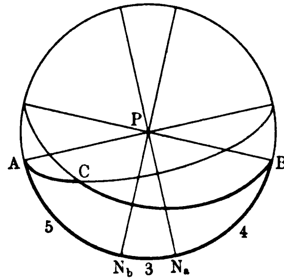
	a	b	c	α	β	γ
1.	i	i	i	i	i	i
2.	i	i	i	i	i	u.

Der Uebergangsfall $\gamma = 90^0$ ist darin einbegriffen.

133. Ist nun $\widehat{AB}$ *stumpf* und liegt C in dem Sector APB, so liefert uns Fig. 37 Folgendes, wenn darin N_a und N_b dieselbe Bedeutung haben, wie in Fig. 36.

Der Sector APB wird durch die Kreis-Quadranten $\widehat{PN_b}$ und $\widehat{PN_a}$ in drei Sectoren zerlegt. Je nach dem Sector, in welchem C liegt, erhalten wir drei verschiedenartige Dreiecksklassen, nämlich:

Fig. 37.

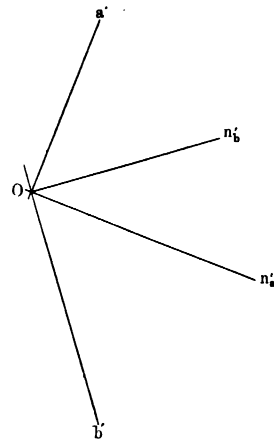


	a	b	c	α	β	γ
3.	i	i	u	i	i	u
4.	i	u	u	i	i	u
5.	u	i	u	i	i	u

Die Zeichnung stellt den Fall 5. dar, wo C in dem Sector APN_b liegt. Die Fälle, wo C im Sector N_bPN_a, bezw. im Sector N_aPB liegt, sind ohne Weiteres abzuleiten. Offenbar ist γ stets stumpf, weil sein Werth zwischen dem stumpfen c und zwei Rechten liegt.

Diesen drei Arten von Dreiecken entsprechen drei verschiedene Arten von körperlichen Ecken, deren gemeinsame Seite c durch den stumpfen Winkel (a', b') gegeben ist. Er liegt in der Ebene des Papiers, Fig. 38. Je nachdem die Projection c'_0 der Kante c' in den Winkel (a', n'_b), (n'_b, n'_a), (n'_a, b') fällt, entstehen drei verschiedene Fälle. Hierbei bedeutet n'_a den in der Ebene (a', b') gelegenen Normalstrahl von a', und n'_b denjenigen von b'.

Fig. 38.



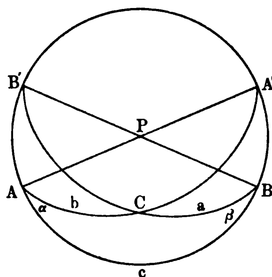
Man kann nun die für Fig. 34 und 35 ausgeführte Construction wiederholen; nur mufs man erforderlichen Falls an Stelle der bei der ersten Construction verwertheten *Strahlen* die durch diese bestimmten *Geraden* setzen. Auch wird daran erinnert, dafs der Cosinus eines *stumpfen* Winkels eine *negative* Zahl ist.

Die Ausführung bietet principiell nichts Neues und bleibt dem Studirenden als empfehlenswerthe Uebung überlassen.

Das Resultat liefert wiederum die Fundamentalgleichungen (A) *und* (B).

134. Jedem sphärischen Dreieck ABC lassen sich *zwei Nebendreiecke und ein Scheiteldreieck* zuordnen, wie die Fig. 39 lehrt. Bedeuten A', B' die Gegenpunkte von A, B, so ist $\widehat{A'B'}$ die Basis des Scheiteldreiecks, dagegen sind $\widehat{A'B}$ und $\widehat{AB'}$ die Basen der Nebendreiecke. Der gemeinsame Scheitel aller vier Dreiecke ist C; sie bilden zusammen die Halbkugel. Je einer Seite und je einem Winkel eines abgeleiteten Dreiecks ist je eine Seite und je ein Winkel des ursprünglichen Dreiecks entweder *gleich* oder *supplementär.* Zwei Seiten sind supplementär, wenn sie einen Halbkreis bilden; zwei Winkel, wenn sie die Halbkugel bilden.

Fig. 39.



Bezeichnet man in jedem Dreieck die Winkel, deren Scheitel A oder A', B oder B', und C sind, mit $\varkappa$, λ und μ, die gegenüberliegenden Seiten mit $\ddot{u}$, v und w ($\ddot{u}$, weil u bereits „stumpf" bedeutet), so erhält man als *Werthe* von $\ddot{u}$, v, w, $\varkappa$, λ, μ für das ursprüngliche Dreieck und die drei abgeleiteten Dreiecke das

Tableau I.

Dreieck	$\ddot{u}$	v	w	$\varkappa$	λ	μ
ABC	a	b	c	α	β	γ
$BA'C$	a	$180^\circ - b$	$180^\circ - c$	α	$180 - \beta^\circ$	$180^\circ - \gamma$
$A'B'C$ . . .	$180^\circ - a$	$180^\circ - b$	c	$180^\circ - \alpha$	$180 - \beta^\circ$	γ
$B'AC$	$180^\circ - a$	b	$180^\circ - c$	$180^\circ - \alpha$	β	$180^\circ - \gamma$

Drückt man für *jedes* Dreieck, vermöge dieses Tableaus, umgekehrt a, b, c, α, β durch $\ddot{u}$, v, w, $\varkappa$, λ aus, so wird stets Sinus von a, b, c, α, β gleich dem Sinus von $\ddot{u}$, v, w, $\varkappa$, λ und Cosinus von a, b, c, α, β gleich oder entgegengesetzt dem Cosinus von $\ddot{u}$, v, w, $\varkappa$, λ, je nachdem a und $\ddot{u}$, b und v, c und w, α und $\varkappa$, β und λ *gleich* oder *supplementär* sind. Setzt man diese Werthe in die Fundamentalgleichungen ein, so erhält man Gleichungen für $\ddot{u}$, v, w, $\varkappa$, λ, welche sich von den Fundamentalgleichungen nur durch die Bezeichnung der Argumente unterscheiden, nämlich:

$$\sin u \sin \lambda = \sin v \sin \varkappa$$
$$\sin u \cos \lambda = \cos v \sin w - \sin v \cos w \cos \varkappa$$
$$\sin v \cos \varkappa = \cos u \sin w - \sin u \cos w \cos \lambda$$
$$\cos u = \cos v \cos w + \sin v \sin w \cos \varkappa$$
$$\cos v = \cos u \cos w + \sin u \sin w \cos \lambda.$$

Es gelten demnach die Gleichungen (A) und (B) der Nr. 131. nicht nur für die fünf ursprünglichen Dreiecke, sondern auch für die drei abgeleiteten eines jeden derselben, also für zwanzig verschiedene Dreiecke.

135. Aus jedem ursprünglichen Dreieck, z. B.

a	b	c	α	β	γ	
i	u	u	i	i	u	(4. der Nr. 133.)

folgt ohne Weiteres mittels des Tableau I., welche Seiten und Winkel eines abgeleiteten Dreiecks i, d. h. spitz, und welche u, d. h. stumpf sind. Denn bei *Uebereinstimmung* der Winkel und Bogen des abgeleiteten Dreiecks mit denen des ursprünglichen, in Bezug auf i und u, tritt keine Aenderung für i und u ein; falls aber die entsprechenden Elemente beider Dreiecke *supplementär* sind, so geht i in u und u in i über. Für das Scheiteldreieck $A'B'C$ des Beispiels würde also entstehen:

a	b	c	α	β	γ
u	i	u	u	u	u.

Bedeutet c die Basis $\widehat{AB}$ und C den Scheitel für jedes der erhaltenen 20 Dreiecke, so entsteht das Tableau II. der folgenden Nummer. Den besonderen Fall $\gamma = 90^0$, welcher dem Tableau II. angehängt ist, leiten wir aus den ersten acht Dreiecken desselben ab, welche sich paarweise (1, 5; 2, 6; 3, 7; 4, 8) nur dadurch unterscheiden, dafs γ für das eine Dreieck spitz, für das andere stumpf ist. Es müssen also diese Dreiecke auch existiren für $\gamma = 90^0 = R$, wo R bedeutet: rechter Winkel.

136. Tableau II.

	a	b	c	α	β	γ	
1.	i	i	i	i	i	i	*1. Ursprüngliches Dreieck.*
2.	i	u	u	i	u	u	Die drei abgeleiteten Dreiecke.
3.	u	u	i	u	u	i	
4.	u	i	u	u	i	u	

	a	b	c	α	β	γ	
5.	i	i	i	i	i	u	*2. Ursprüngliches Dreieck.*
6.	i	u	u	i	u	i	Die drei abgeleiteten Dreiecke.
7.	u	u	i	u	u	u	
8.	u	i	u	u	i	i	
9.	i	i	u	i	i	u	*3. Ursprüngliches Dreieck.*
10.	i	u	i	i	u	i	Die drei abgeleiteten Dreiecke.
11.	u	u	u	u	u	u	
12.	u	i	i	u	i	i	
13.	i	u	u	i	i	u	*4. Ursprüngliches Dreieck.*
14.	i	i	i	i	u	i	Die drei abgeleiteten Dreiecke.
15.	u	i	u	u	u	u	
16.	u	u	i	u	i	i	
17.	u	i	u	i	i	u	*5. Ursprüngliches Dreieck.*
18.	u	u	i	i	u	i	Die drei abgeleiteten Dreiecke.
19.	i	u	u	u	u	u	
20.	i	i	i	u	i	i	

Für $\gamma = R$ (Nr. 135., Ende) entsteht aus 2. bis 8.:

21.	i	i	i	i	i	R	*Ursprüngliches rechtwinkliges Dreieck.*
22.	i	u	u	i	u	R	Die drei abgeleiteten rechtwinkligen Dreiecke.
23.	u	u	i	u	u	R	
24.	u	i	u	u	i	R	

137. *Andere Grunddreiecke, d. h. Kugeldreiecke, deren Seiten beliebig spitz oder stumpf sind,* als die aufgeführten des Tableau II., *kann es nicht geben.* Man überzeugt sich davon direct mittels der Fig. 40 und 41. Dieselben stellen wiederum die Halbkugeln dar, auf deren Grundkreis die Dreieckbasis $\widehat{AB} = c$ liegt; P ist der Pol, $N_a P N_a$ und $N_b P N_b$ sind die Polaren von A und B.

In Fig. 40 ist $\widehat{AB}$ *spitz*, in Fig. 41 ist $\widehat{AB}$ *stumpf.*

Durch die Halbkreise APA', BPB', $N_a P N_a$, $N_b P N_b$ ist jede Halbkugel in acht Sectoren (Kugeldreiecke) getheilt. Dieselben sind durch die Zahlen 1, 2, 3 ... 8 innerhalb der beiden kleinen Kreise bezeichnet.

Je nach dem Sector, in welchem die Spitze C des Kugeldreiecks ABC liegt, wird ein bestimmtes der 20 Dreiecke des Tableaus geliefert; und weil damit *alle* Lagen von C erschöpft sind, so kann es keine anderen Arten von Kugeldreiecken mit einer spitzen oder stumpfen Basis geben.

Fig. 40.

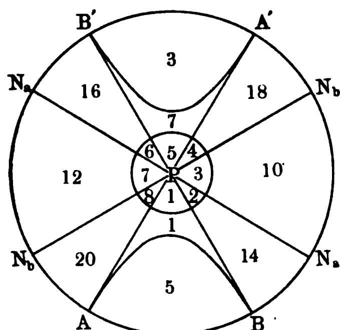
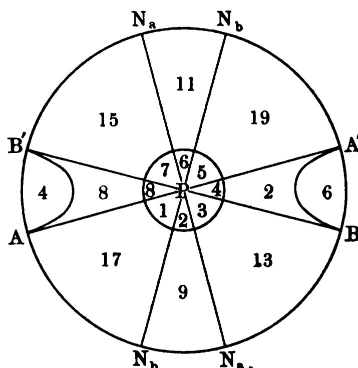


Fig. 41.



Die Nummern auf dem *Ringe* zwischen beiden Kreisen in jeder Figur beziehen sich auf die Nummern der *Horizontalreihen* in dem Tableau II. Liegt z. B. die Dreieckspitze C in dem Sector 12 (Fig. 40), so gehört Dreieck ABC zu der Klasse, welche durch Horizontalreihe 12. bestimmt ist.

Die Curvenbogen in den mit Doppelnummern bezeichneten Sectoren 1,5 und 3,7 in Fig. 40, 2,6 und 4,8 in Fig. 41, zerlegen jeden dieser Sectoren in ein centrales und in ein peripherisches Gebiet. Für die centralen Gebiete 1 oder 7 (Fig. 40) ist $\angle C$ $(= \gamma)$ spitz und für die peripherischen Gebiete 3 oder 5 stumpf. Für die centralen Gebiete 2 oder 8 (Fig. 41) ist $\angle C$ stumpf und für die peripherischen Gebiete 4 oder 6 spitz.

Die Curvenbogen als Grenzen der beiden Gebiete liefern die Lagen von C, für welche ABC ein bei C *rechtwinkliges* Dreieck ist. Durch folgende Ueberlegung läfst sich einsehen, dafs die Curvenbogen dem Schnitt der Kugel mit vier elliptischen Kegeln angehören, welche durch die spitzen Bogen $\widehat{AB}$, $\widehat{A'B'}$ (Fig. 40) und durch die spitzen Bogen $\widehat{AB'}$, $\widehat{BA'}$ (Fig. 41) bestimmt sind.

Der geometrische Ort der Normalscheitel, welche einer Dreieckbasis $\widehat{AB} < 90^0$ zugeordnet sind.

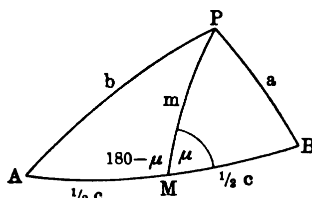
138. Allgemein soll ein Punkt P, welcher als Scheitel eines Kugeldreiecks mit der *Basis* $\widehat{AB} < 90^0$ *ein bei* P *rechtwinkliges Dreieck* bestimmt, ein *Normalscheitel der spitzen Basis* $\widehat{AB}$ heifsen. Dann entsteht die Frage: welches ist der geometrische Ort der Normalscheitel, deren Basis ein beliebig gegebener Hauptkreisbogen $\widehat{AB} < 90^0$ ist?

In Fig. 42 ist Kugelbogen $\widehat{AB}$ gegeben und seine Mitte M. P soll ein Normalscheitel sein; also ist $\angle APB = 90^0$.

Es sei

$$\widehat{AB} = c < 90^0, \quad \widehat{BP} = a, \quad \widehat{AP} = b,$$
$$\widehat{MP} = m, \quad \widehat{MA} = \widehat{MB} = \frac{1}{2}c.$$

Fig. 42.



μ sei die Neigung (stets spitz) des Bogens $\widehat{MP} = m$ gegen den Kreis (A, B); in der Figur ist also $\mu = \angle PMB$. Offenbar liefert jeder durch A (oder durch B) gelegte Hauptkreis einen Punkt P als Fufspunkt des von B (oder von A) auf ihn gefällten sphärischen Lothes. Es liefert Nr. 145, II., gemäfs Nr. 131.:

Dreieck ABP: $\cos c = \cos a \cos b$, weil $\cos P = \cos 90^0 = 0$

" BMP: $\cos a = \cos m \cos \frac{1}{2} c + \sin m \sin \frac{1}{2} c \cos \mu$

" AMP: $\cos b = \cos m \cos \frac{1}{2} c - \sin m \sin \frac{1}{2} c \cos \mu$,

weil $\cos(180^0 - \mu) = -\cos \mu$

$$\cos c = \cos^2 m \cos^2 \frac{1}{2} c - \sin^2 m \sin^2 \frac{1}{2} c \cos^2 \mu.$$

Nach Division der letzten Gleichung mit $\cos^2 m$ und Anwendung der stets giltigen Relationen:

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}, \; \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x, \; \cos x = \cos^2 \frac{1}{2} x - \sin^2 \frac{1}{2} x,$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

erhält man:

$$tg^2 m = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} c}{\cos^2 \frac{1}{2} c - \sin^2 \frac{1}{2} c \sin^2 \mu}.$$

Dieser Gleichung kann man die beiden Formen geben:

$$\cos^2 \frac{1}{2} c \, tg^2 m = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} c}{1 - tg^2 \frac{1}{2} c \sin^2 \mu}$$

$$tg^2 m = \frac{tg^2 \frac{1}{2} c}{1 - tg^2 \frac{1}{2} c \sin^2 \mu}.$$

139. Die Gleichung sagt aus: ist μ die Neigung des sphärischen Radius vector $\widehat{MP}$ gegen den gröfsten Kreis (A, B), und ist das sphärische Dreieck ABP bei P rechtwinklig, so ist m der Werth des Bogens $\widehat{MP}$, wenn c der Werth des Bogens $\widehat{AB}$ ist.

Jeder Werth von μ liefert einen Werth m und dadurch vier Punkte P. Denn es gibt stets zwei Kreise der durch M und seinen Gegenpunkt bestimmten Kreisschaar, welche die Neigung μ gegen den Kreis (A, B) besitzen; auf jedem derselben liegen je zwei Punkte P in gleichen und entgegengesetzten Abständen m $(= \widehat{MP})$ von M. Diese vier Punkte liegen paarweise symmetrisch in Bezug auf Kreis (A, B) und seinen Normalkreis durch M, und jedem Werthe von μ entsprechen vier solcher Punkte. Erhält μ alle Werthe von 0 bis 90^0, so entsteht die sphärische Curve E, der gesuchte Ort der Normalscheitel P; sie ist symmetrisch sowohl in Bezug auf den Kreis (A, B) wie in Bezug auf den durch M gelegten Normalkreis des letzteren.

Der kleinste sphärische Radius vector wird erhalten für $\mu = 0$; dieser Werth liefert:

$$tg^2 m = tg^2 \frac{1}{2} c, \quad \text{also } m = \frac{1}{2} c.$$

Hier fallen die dem Werthe von μ entsprechenden vier Punkte P paarweise auf dem Kreise (A, B) zusammen; das eine Paar fällt nach A, das andere nach B. Der sphärische Radius vector m erhält seinen gröfsten Werth für $\mu = 90^0$; alsdann wird:

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} c}{\cos c} = tg^2 m = \frac{tg^2 \frac{1}{2} c}{1 - tg^2 \frac{1}{2} c},$$

und die vier Normalscheitel P fallen paarweise zusammen auf dem Normalkreise des Kreises (A, B).

Die sphärische Curve E verhält sich also analog einer ebenen Ellipse. Da $\frac{1}{2} c$ der kleinste Werth ist, welchen der sphärische Radius vector $\widehat{MP}$ annehmen kann, so umschliefst E den Nebenkreis k, dessen *sphärischer* Mittelpunkt M ist, dessen *sphärischer* Radius $\frac{1}{2} c$ ist, und berührt k in den Punkten AB.

140. Es sei v die Ebene des Nebenkreises k der Kugel, sein auf v gelegener Mittelpunkt sei M_0; sein Durchmesser ist die Sehne $\overline{AB}$ des Bogens $\widehat{AB}$.

Fig. 43.

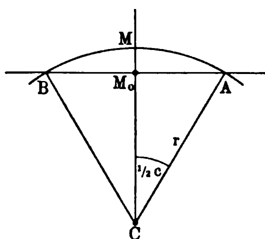


Fig. 43 liegt in der Ebene des Bogens $\widehat{AB}$. Ist C das Kugelcentrum, so liegt M_0 auf dem Radius $r = \overline{CM}$, welcher die Normale der Ebene v ist. Für einen Raumwinkel mit der Kante CM liefern also die Schnitte mit der Ebene v und der Kugel je einen ebenen und einen sphärischen *zugeordneten* Winkel. Die Ebene v geht durch $\overline{AB}$ und liegt normal zur Ebene des Bogens $\widehat{AB}$. Da $\widehat{AM} = \frac{1}{2} c$, so ist im Dreieck ACM_0 der $\angle C = \frac{1}{2} c$; folglich ist $\overline{CM_0} = r \cos \frac{1}{2} c$.

Fig. 44 liegt in der durch CM und den Normalscheitel P bestimmten Ebene. P liefert den sphärischen Winkel μ und den Bogen $m = \widehat{MP}$ (Nr. 138.). P_0 ist der Schnittpunkt des Strahles CP mit der Ebene v, welche sich mit der Ebene CMP in der Geraden QM_0R schneidet.

Also ist im Dreieck CM_0P_0 der $\angle C = m$ und $\varrho = \overline{M_0P_0} = \overline{CM_0}\ tg\ m = r \cos \frac{1}{2} c\ tg\ m.$

In Fig. 45 ist v die Ebene der Zeichnung, der dargestellte Kreis ist der Nebenkreis k (Nr. 139.).

Die Gerade AB werde mit Y, ihre Normale in M_0 mit X bezeichnet.

Dem Raumwinkel, dessen Kante CM_0 ist, dessen einer Flügel durch P_0, dessen anderer durch B geht, ist der ebene Winkel $P_0 M_0 B$ zugeordnet und auch der sphärische Neigungswinkel μ des sphärischen Radius vector $\widehat{MP}$ gegen Kreis (A, B); also ist μ die Neigung des Radius vector $\overline{M_0 P_0}$ gegen die Gerade Y.

Fig. 44.

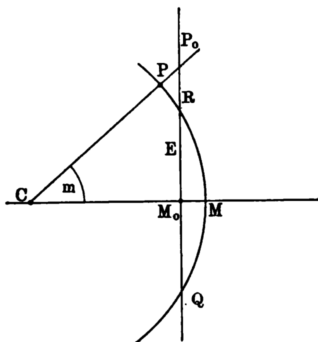
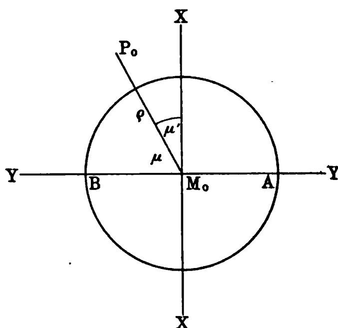


Fig. 45.



Wird $\mu = 90^0 - \mu'$, $\frac{\varrho}{r} = \cos\frac{1}{2}c\ tg\, m$, $\sin\mu = \sin(90^0 - \mu')$ $= \cos\mu'$ in die Gleichung (Nr. 138.)

$$\cos^2\frac{1}{2}c\ tg^2\, m = \frac{\sin^2\frac{1}{2}c}{1 - tg^2\frac{1}{2}c\ \sin^2\mu}$$

eingesetzt, so entsteht:

$$\varrho^2 = \frac{r^2\sin^2\frac{1}{2}c}{1 - tg^2\frac{1}{2}c\ \cos^2\mu'}.$$

141. Betrachten wir für das rechtwinklige Coordinatensystem XY der Fig. 45 eine Ellipse, deren Mittelpunkt in M_0, deren grofse Axe $2a$ in X, deren kleine Axe $2b$ in Y liegt, so ist die Gleichung der Ellipse (Nr. 67.) gegeben durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ist $P' = x, y$ ein beliebiger Punkt dieser Ellipse, bedeutet ϱ die Länge des Radius vector $\overline{M_0 P'}$ und μ' seine Neigung gegen die X-Axe, so ist, nach der Theorie der Ellipse,

$$\varrho^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^2 \cos^2 \mu'},$$

wo $b^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$ ist und $\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ das Quadrat der Excentricität ε bedeutet.

Dieses Resultat wird mittels der Polarcoordinaten (Nr. 56.) ϱ, α des Ellipsenpunktes x, y erhalten. Setzt man $x = \varrho \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$ in die Ellipsengleichung ein und berücksichtigt, dafs zwischen der Neigung μ' eines Radius vector gegen die X-Axe und seiner Polarabscisse α stets die Beziehung statthat: $\cos^2 \mu' = \cos^2 \alpha$, so erhält man den gegebenen Ausdruck für ϱ^2.

Vergleicht man denselben mit

$$\varrho^2 = \frac{r^2 \sin^2 \frac{1}{2} c}{1 - tg^2 \frac{1}{2} c \cos^2 \mu'}$$

in Nr. 140., so folgt, dafs diese Gleichung eine Ellipse (in Bezug auf das gegebene Coordinatensystem XY) darstellt, deren kleine Halbaxe b und deren Excentricität ε gegeben sind durch

$$b = r \sin \frac{1}{2} c \quad \text{und} \quad \varepsilon = tg \frac{1}{2} c.$$

Da

$$a^2 = \frac{b^2}{1-\varepsilon^2},$$

so folgt durch Einsetzen und Umformen

$$a = \frac{r \sin c}{2\sqrt{\cos c}}.$$

Damit ist gezeigt, dafs jede *Grenzcurve* in der Fig. 41 und 42 der *Schnitt der Kugel mit einem elliptischen Kegel* ist. Die Seiten dieses Kegels gehen durch die Punkte einer ebenen Ellipse, deren kleine Axe $2b = 2r \sin \frac{1}{2} c$ die Sehne des Bogens $\widehat{AB}$ (bezw. $\widehat{AB'}$) $= c$ ist, und deren grofse Axe $2a = \frac{r \sin c}{\sqrt{\cos c}}$ normal liegt zu der Ebene des Bogens $\widehat{AB}$.

Diese Ellipse verläuft aufserhalb der Kugel und berührt die letztere in den Punkten A und B.

142. Jeder Sector (Fig. 40, 41), in welchem eine halbe Grenzcurve verläuft, liefert demnach drei verschiedene Gattungen von sphärischen Dreiecken ABC. Je nach der Lage von C in einem derselben ist der $\angle C$ entweder spitz oder stumpf oder ein Rechter.

Auf diese Weise erklärt es sich, dafs die 16 Sectoren in Fig. 41 und 42 alle 24 Fälle des Tableau II. liefern.

Demnach ist erwiesen:

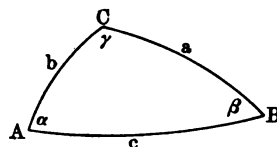
Andere sphärische Grunddreiecke mit der Basis c und der Spitze C, als die im Tableau II. aufgeführten, gibt es nicht; und es gelten für jedes derselben die fünf Fundamentalgleichungen (A) *und* (B).

Es wird in Nr. 152. der Begriff des sphärischen Dreiecks erweitert und gezeigt werden, dafs zu jedem Grunddreieck ABC noch sieben andere Dreiecke ABC gehören, welche selbst nicht Grunddreiecke sind, für welche jedoch die Fundamentalformeln gleichfalls gelten.

Das Princip der cyklischen Vertauschung.

143. Ist ein sphärisches Dreieck gegeben, so können wir willkürlich eine Seite als Basis betrachten und die Fundamentalgleichungen ansetzen. Sind der Basis c mit dem gegenüberliegenden Winkel γ die benachbarten Seiten a und b mit den gegenüberliegenden Winkeln α und β zugeordnet, so sind der Basis a mit dem gegenüberliegenden Winkel α die Seiten b und c, die Winkel β und γ; der Basis b mit dem gegenüberliegenden Winkel β die Seiten c und a, die Winkel γ und α zugeordnet.

Fig. 46.



Für den ersten Fall gelten also die Fundamentalgleichungen (A) und (B) direct, für den zweiten, bezw. dritten entstehen dieselben aus (A) und (B), wenn an Stelle von

$$c\,\gamma, \qquad a\,\alpha, \qquad b\,\beta$$

gesetzt wird

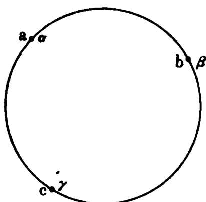
$$a\,\alpha, \qquad b\,\beta, \qquad c\,\gamma$$

bezw.

$$b\,\beta, \qquad c\,\gamma, \qquad a\,\alpha.$$

Diese vorgeschriebene zweifache Vertauschung nennt man die *erste und zweite cyklische Vertauschung* der Argumente. Denkt man sich $a\,\alpha$, $b\,\beta$, $c\,\gamma$ auf einem Kreise angeordnet, welcher rechts herum durchlaufen wird, so entsteht die vorgeschriebene erste Vertauschung, indem man statt eines jeden der drei Paare $a\,\alpha$, $b\,\beta$, $c\,\gamma$ das nächstfolgende setzt. Die zweite Vertauschung entsteht durch Wiederholung dieses Verfahrens an den neu erhaltenen Gleichungen, oder auch, indem man in den ursprünglichen Gleichungen die cyklische Vertauschung im entgegengesetzten Kreissinne vornimmt.

Fig. 47.



Da alle Gleichungen der sphärischen Trigonometrie eine Folge der Fundamentalgleichungen sind, so erhält man aus einer jeden Gleichung stets zwei neue richtige Gleichungen durch Anwendung der ersten und zweiten cyklischen Vertauschung.

144. Die cyklische Vertauschung liefert aus den fünf Gleichungen (A) und (B) zehn weitere Gleichungen. Die Gleichungen für $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ treten indefs zweimal auf, so dafs wir nur zwölf *verschiedene* Gleichungen erhalten, nämlich:

I.
1. $\sin a \sin\beta = \sin b \sin\alpha$
2. $\sin b \sin\gamma = \sin c \sin\beta$
3. $\sin c \sin\alpha = \sin a \sin\gamma.$

II.
4. $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$
5. $\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos\beta$
6. $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma.$

III.
7. $\sin a \cos\beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos\alpha$
8. $\sin b \cos\gamma = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos\beta$
9. $\sin c \cos\alpha = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos\gamma.$

10. $\sin b \cos\alpha = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos\beta$
11. $\sin c \cos\beta = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos\gamma$
12. $\sin a \cos\gamma = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos\alpha.$

Dividirt man Gleichung 7. durch Gleichung 1., ebenso Gleichung 10. durch Gleichung 1., nachdem man in letzterer die beiden Seiten vertauscht hat, so entsteht:

IV. 13. $\sin\alpha \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg} b \sin c - \cos c \cos\alpha$

16. $\sin\beta \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg} a \sin c - \cos c \cos\beta$.

Die Gleichungen 14. und 15. des Systems IV. gehen aus 13. hervor mittels der cyklischen Vertauschungen; analog die Gleichungen 17. und 18. aus 16. Im System III. treten in jeder Gleichung fünf Argumente auf, im System IV. nur vier.

145. Für die Anwendung auf beliebige Kugeldreiecke, deren Seiten und Winkel andere Bezeichnungen haben, als die hier angewandten $a\ \alpha$, $b\ \beta$, $c\ \gamma$, ist es praktisch, sich den Inhalt der Gleichungen I., II., III. in Worten einzuprägen, etwa so:

I. Das Sinusproduct einer Seite und eines anliegenden Winkels bleibt unverändert, wenn die gegenüberliegenden Stücke dafür gesetzt werden: *Sinussatz.*

II. Der Cosinus einer Seite ist gleich dem Cosinus des gegenüberliegenden Winkels mal dem Sinusproduct der beiden anderen Seiten plus dem Cosinusproduct der letzteren: *Cosinussatz.*

III. Der Sinus einer Seite (Ausgangsseite) mal dem Cosinus eines ihr anliegenden Winkels ist gleich dem Cosinus der gegenüberliegenden Seite mal dem Sinus der noch nicht verwandten Seite, minus dem hieraus durch Vertauschung der Argumente hervorgehenden Product mal dem Cosinus des Winkels, welcher der Ausgangsseite gegenüberliegt.

Durch Uebung an einigen Beispielen prägen sich diese Sätze viel leichter ein, als es den Anschein hat.

146. Jedem sphärischen Grunddreieck ABC läfst sich eindeutig ein zweites sphärisches Grunddreieck $A'B'C'$ in folgender Weise zuordnen: das Dreieck ABC liegt gleichzeitig auf drei Halbkugeln, deren Grundkreise durch AB, BC, CA gegeben sind. Nennt man die Scheitel dieser Halbkugeln bezw. $C'A'B'$, so heifst $A'B'C'$ das *Polardreieck* von ABC. Bestimmt man das Polardreieck von $A'B'C'$, so erhält man wiederum das Dreieck ABC.

Erinnert man sich der Sätze über Pole und Polaren und über die Gleichwerthigkeit zugeordneter Bogen und Winkel für conforme Einheiten, so liefert die Betrachtung zweier Dreiecke ABC (a, b, c, α, β, γ) und $A'B'C'$ (a', b', c', α', β', γ'), von denen das eine das Polardreieck des anderen ist für die Gradeinheit:

$$180^0 = a + \alpha' = b + \beta' = c + \gamma'$$
$$180^0 = a' + \alpha = b' + \beta = c' + \gamma.$$

Setzt man die Fundamentalformeln für das Polardreieck $A'B'C'$ an und führt darin ein:

$$\begin{array}{lll} \sin a' = \sin \alpha, & \sin b' = \sin \beta, & \sin c' = \sin \gamma \\ \sin \alpha' = \sin a, & \sin \beta' = \sin b, & \sin \gamma' = \sin c \\ \cos a' = -\cos \alpha, & \cos b' = -\cos \beta, & \cos c' = -\cos \gamma \\ \cos \alpha' = -\cos a, & \cos \beta' = -\cos b, & \cos \gamma' = \cos c, \end{array}$$

so erhält man neue Gleichungen für das ursprüngliche Dreieck ABC.

Das Resultat der Substitution ist aber dasselbe, als ob man in den Systemen I., II., III., IV. die Argumente durch die gegenüberliegenden Stücke ersetzt und vor allen Producten, in denen ein Cosinus oder eine Cotangens *einmal* auftritt, das Zeichen umschlagen läfst.

Das System I. reproducirt sich dabei, liefert also nichts Neues.

Aus II. 4. entsteht *nach Umkehr aller Zeichen*:

V. 19. $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a,$

analog aus III. 7. und III. 10.:

VI. 22. $\sin \alpha \cos b = \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \cos a$

VI. 25. $\sin \beta \cos a = \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \cos b,$

analog aus IV. 13. und IV. 16.:

VII. 28. $\sin a \, ctg \, b = ctg \, \beta \sin \gamma + \cos \gamma \cos a$

VII. 31. $\sin b \, ctg \, a = ctg \, \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \cos b.$

Alsdann liefern die beiden cyklischen Vertauschungen die Gleichungen V. 20., 21.; VI. 23., 24., 26., 27.; VII. 29., 30., 32., 33., welche hinzuschreiben zwecklos erscheint.

147. Der Uebersicht wegen sollen die abgeleiteten Gleichungen, welche *ohne* Anwendung cyklischer Vertauschung erhalten worden sind, wie folgt zusammengestellt worden.

I. 1. $\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha$

II. 4. $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$

III. 7. $\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha$

III. 10. $\sin b \cos\alpha = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos\beta$
IV. 13. $\sin\alpha\, ctg\,\beta = ctg\, b \sin c - \cos c \cos\alpha$
IV. 16. $\sin\beta\, ctg\,\alpha = ctg\, a \sin c - \cos c \cos\beta$
V. 19. $\cos\alpha = -\cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos a$
VI. 22. $\sin\alpha \cos b = \cos\beta \sin\gamma + \sin\beta \cos\gamma \cos a$
VI. 25. $\sin\beta \cos a = \cos\alpha \sin\gamma + \sin\alpha \cos\gamma \cos b$
VII. 28. $\sin a\, ctg\, b = ctg\,\beta \sin\gamma + \cos\gamma \cos a$
VII. 31. $\sin b\, ctg\, a = ctg\,\alpha \sin\gamma + \cos\gamma \cos b.$

Das rechtwinklige sphärische Dreieck.

148. Für den Fall $\gamma = 90^0$, d. h. $\sin\gamma = 1$, $\cos\gamma = 0$, $ctg\,\gamma = 0$, wird Dreieck ABC ein bei C rechtwinkliges Kugeldreieck. a und b heifsen die *sphärischen Katheten*, c heifst die *sphärische Hypotenuse.*

In diesem Falle vereinfachen sich die in den Systemen I. bis VII. enthaltenen Gleichungen wesentlich, soweit das Argument γ darin auftritt. Diejenigen unter ihnen, welche alsdann nur noch *drei* Stücke des rechtwinkligen Dreiecks enthalten, sind hier zusammengestellt, und zwar soll jede der Gleichungen in doppelter Form in derselben Horizontalreihe hingeschrieben werden, nämlich so:

$\cos\alpha \cos\beta = \sin\alpha \sin\beta \cos c$	$\cos c = ctg\,\alpha\, ctg\,\beta$
$\cos a \cos\beta = ctg\, c \sin a$	$\cos\beta = ctg\, c\, ctg(90^0 - a)$
$ctg\,\beta = ctg\, b \sin a$	$\cos(90^0 - a) = ctg\,\beta\, ctg(90^0 - b)$
$ctg\,\alpha = ctg\, a \sin b$	$\cos(90^0 - b) = ctg(90^0 - a)\, ctg\,\alpha$
$\cos b \cos\alpha = ctg\, c \sin b$	$\cos\alpha = ctg(90^0 - b)\, ctg\, c$
$\cos c = \cos a \cos b$	$\cos c = \sin(90^0 - b) \sin(90^0 - a)$
$\cos\beta = \cos b \sin\alpha$	$\cos\beta = \sin\alpha \sin(90^0 - b)$
$\sin a = \sin\alpha \sin c$	$\cos(90^0 - a) = \sin c \sin\alpha$
$\sin b = \sin\beta \sin c$	$\cos(90^0 - b) = \sin\beta \sin c$
$\cos\alpha = \cos a \sin\beta$	$\cos\alpha = \sin(90^0 - a) \sin\beta.$

Hierbei sind die Formeln angewandt:

$$\sin x = \cos(90^0 - x) \quad tg\, x = ctg(90^0 - x) \quad tg\, x\, ctg\, x = 1.$$
$$\cos x = \sin(90^0 - x) \quad ctg\, x = tg(90^0 - x)$$

Die Formen der rechten Columne enthalten die sogenannte *Napier'sche Regel.* Dieselbe läfst sich folgendermafsen aussprechen: sind a und b die Katheten, α und β die gegenüber-

liegenden Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks (Fig. 49) mit der Hypotenuse c, so ordne man die Zahlen

$$c,\ \alpha,\ 90^0 - b,\ 90^0 - a,\ \beta$$

Fig. 48.

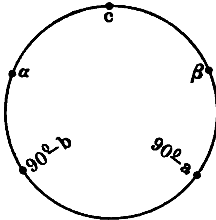
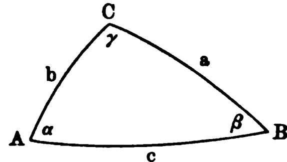


Fig. 49.



cyklisch so an, wie Fig. 48 zeigt. Jedes der fünf Elemente besitzt *zwei benachbarte Elemente*; die beiden anderen sollen die *gegenüberliegenden* heifsen, und es ergibt sich:

Der *Cosinus jedes Elementes* ist

einerseit gleich dem *Cotangentenproduct* der beiden *benachbarten* Elemente, andererseit gleich dem *Sinusproduct* der beiden *gegenüberliegenden* Elemente.

Auch in folgender Anordnung prägen sich die zehn Gleichungen leicht ein:

VIII.

$$\cos c = \cos a \cos b; \qquad \cos c = ctg\,\alpha\; ctg\,\beta;$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\cos\beta}{\cos b}; \qquad \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\cos\alpha}{\cos a};$$

$$\cos\alpha = \frac{tg\,b}{tg\,c}; \qquad \cos\beta = \frac{tg\,a}{tg\,c};$$

$$tg\,\alpha = \frac{tg\,a}{\sin b}; \qquad tg\,\beta = \frac{tg\,b}{\sin a}.$$

Umformungen des Cosinussatzes.

149. Die drei Gleichungen des Cosinussatzes sind gegeben durch System II. in Nr. 144; die erste lautet:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$

und gestattet zu schreiben:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Hiermit werden die Gleichungen 11., 12. der Nr. 63. successive verbunden:

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = 1 - \cos \alpha \quad \text{und} \quad 2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha = 1 + \cos \alpha.$$

Dadurch entstehen Ausdrücke für $\sin^2 \frac{1}{2} \alpha$ und $\cos^2 \frac{1}{2} \alpha$, welche sich unter Anwendung der früher entwickelten Formeln (Nr. 63.: 3., 4., 8.):

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

$$\cos u - \cos v = 2 \sin \frac{1}{2}(v - u) \sin \frac{1}{2}(v + u)$$

umgestalten lassen. Wenn alsdann gesetzt wird:

$$\frac{1}{2}(a+b+c) = s,\ \frac{1}{2}(a+b-c) = \frac{1}{2}(a+b+c-2c) = s - c \text{ u.s.w.},$$

so erhält man die folgenden Gleichungen 34. und 37., aus denen durch cyklische Vertauschung die übrigen vier des Systems IX. hervorgehen, nämlich:

IX.

$$34.\quad \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c},$$

$$35.\quad \sin^2 \frac{1}{2} \beta = \frac{\sin(s-c) \sin(s-a)}{\sin c \sin a},$$

$$36.\quad \sin^2 \frac{1}{2} \gamma = \frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b},$$

$$37.\quad \cos^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c},$$

$$38.\quad \cos^2 \frac{1}{2} \beta = \frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin c \sin a},$$

$$39.\quad \cos^2 \frac{1}{2} \gamma = \frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}.$$

150. Bildet man hieraus die vier Producte $\cos^2 \frac{1}{2} \alpha \cos^2 \frac{1}{2} \beta$, $\sin^2 \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \frac{1}{2} \beta$, $\cos^2 \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \frac{1}{2} \beta$, $\sin^2 \frac{1}{2} \alpha \cos^2 \frac{1}{2} \beta$, unter Berücksichtigung der Gleichungen IX, 36., 39. für $\sin^2 \frac{1}{2} \gamma$ und $\cos^2 \frac{1}{2} \gamma$, so entsteht:

$$\begin{cases} \cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta = \frac{\sin s}{\sin c}\sin\frac{1}{2}\gamma \\ \sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{1}{2}\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{\sin(s-a)}{\sin c}\cos\frac{1}{2}\gamma \\ \sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta = \frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cos\frac{1}{2}\gamma. \end{cases}$$

Durch Addition und durch Subtraction sowohl des ersten wie des zweiten Gleichungspaares entstehen vier neue Formen. Unter Anwendung der Ausdrücke für $\cos(u \pm v)$, $\sin(u \pm v)$, $\sin u + \sin v$, $\sin u - \sin v$ (Nr. 63.) erhält man die *Gleichungen von Gaufs:*

X.

$$40.\quad \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}c = \sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}\gamma$$

$$43.\quad \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}c = \cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}\gamma$$

$$46.\quad \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}c = \sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma$$

$$49.\quad \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}c = \cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma,$$

von denen eine jede alle sechs Stücke des Dreiecks enthält. Die cyklische Vertauschung liefert noch acht Gleichungen, nämlich 41. und 42. aus 40., 44. und 45. aus 43., 47. und 48. aus 46., 50. und 51. aus 49.; dieselben werden hier nicht aufgeführt.

151. Mittels Division je zweier, passend gewählten Gaufsschen Gleichungen entstehen die *Napier'schen Analogien:*

XI.

$$52.\quad tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\,ctg\frac{1}{2}\gamma$$

$$55.\quad tg\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\,ctg\frac{1}{2}\gamma$$

XI.

$$58.\quad tg\,\frac{1}{2}\,(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,tg\,\frac{1}{2}\,c$$

$$61.\quad tg\,\frac{1}{2}\,(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,tg\,\frac{1}{2}\,c,$$

aus denen Gleichungen für $ctg\,\frac{1}{2}\,\gamma$ und $tg\,\frac{1}{2}\,c$ folgen. Die cyklische Vertauschung liefert acht weitere, hier unterdrückte Gleichungen, nämlich 53. und 54. aus 52., 56. und 57. aus 55., 59. und 60. aus 58., 62. und 63. aus 61.

Analog der mit den drei Gleichungen des Cosinussatzes II. vorgenommenen Umwandlung lassen sich auch die Gleichungen V. (Nr. 147.)

$$\cos\alpha=-\cos\beta\,\cos\gamma+\sin\beta\,\sin\gamma\,\cos a, \text{ u. s. w.}$$

umwandeln.

Setzt man $\sigma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$, so folgt:

$$\sin^2\frac{1}{2}\,a=-\frac{\cos\sigma\,\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\,\sin\gamma}$$

$$\cos^2\frac{1}{2}\,a=\frac{\cos(\sigma-\gamma)\,\cos(\sigma-\beta)}{\sin\gamma\,\sin\beta}.$$

Hierzu kommen vier andere Gleichungen durch cyklische Vertauschung. Das Zeichen — vor dem Ausdruck für $\sin^2\frac{1}{2}\,a$ erklärt sich daraus, dafs $\cos\sigma$ stets negativ ist; der Grund liegt in dem sogenannten *sphärischen Excefs* (Nr. 154.), wonach $\alpha+\beta+\gamma$ stets $> 180^0$, also $\sigma > 90^0$ und stumpf ist.

Sind von den sechs Stücken eines sphärischen Dreiecks nur drei Stücke bekannt, so lassen sich die fehlenden Stücke mittels des Sinussatzes I., der Gleichungen IX. und der Napier'schen Analogien XI. logarithmisch berechnen.

Hiervon werden wir bei der Lösung unserer ortsbestimmenden Aufgaben Gebrauch machen.

Erweiterter Begriff der sphärischen Dreiecke.

152. Drei Kugelpunkte ABC bestimmten uns ein sphärisches Grunddreieck, in welchem die Seiten kleiner als ein Halbkreis waren. Offenbar lassen sich noch *sieben andere sphärische Dreiecke* ABC aufstellen, deren Ecken die Punkte ABC sind. Zunächst liefert jede der drei Halbkugeln, deren Grundkreise durch AB, BC, CA gegeben sind, je ein Dreieck ABC, welches sich mit dem Grunddreieck zur *Halbkugel* ergänzt. Wird z. B. die Halbkugel des Kreises (A, B) betrachtet, und besitzt das Grunddreieck die Stücke a, b, c, α, β, γ, so besitzt das Supplementdreieck die Stücke a, b, $360^0 - c$, $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$, $360^0 - \gamma$.

Die *Kugelergänzung* des Grunddreiecks, bezw. der drei Supplementdreiecke liefert für jedes derselben ein „*conjugirtes*" Dreieck. Zwei conjugirte Dreiecke besitzen dieselben Seiten, aber ihre Winkel mit gemeinsamem Scheitel sind conjugirt (Nr. 36.).

Es ergeben sich also für die acht Dreiecke ABC folgende von einander abhängige Stücke:

das Grunddreieck:					
a	b	c	α	β	γ
die supplementären Dreiecke:					
$360^0 - a$	b	c	$360^0 - \alpha$	$180^0 - \beta$	$180^0 - \gamma$
a	$360^0 - b$	c	$180^0 - \alpha$	$360^0 - \beta$	$180^0 - \gamma$
a	b	$360^0 - c$	$180^0 - \alpha$	$180^0 - \beta$	$360^0 - \gamma$
die conjugirten Dreiecke:					
a	b	c	$360^0 - \alpha$	$360^0 - \beta$	$360^0 - \gamma$
$360^0 - a$	b	c	α	$180^0 + \beta$	$180^0 + \gamma$
a	$360^0 - b$	c	$180^0 + \alpha$	β	$180^0 + \gamma$
a	b	$360^0 - c$	$180^0 + \alpha$	$180^0 + \beta$	γ

Die Ausdrücke *supplementäre und conjugirte Dreiecke* sind nach Analogie mit den sphärischen Winkeln gewählt, welche supplementär, bezw. conjugirt heifsen, wenn sie sich zur Halbkugel, bezw. zur Kugel ergänzen.

Man kann sich ohne Weiteres überzeugen, dafs die Fundamentalgleichungen I., II., III. (Nr. 144.) auch für die Stücke der sieben abgeleiteten Dreiecke gelten. Denn setzt man ihre Werthe

successive in I., II., III. ein, so entstehen wiederum die Fundamentalgleichungen, also richtige Gleichungen, sobald berücksichtigt wird, dafs

$$sin(180^0 - u) = sin\,u, \quad sin(180^0 + u) = -sin\,u,$$
$$sin(360^0 - u) = -sin\,u,$$
$$cos(180^0 - u) = -cos\,u, \quad cos(180^0 + u) = -cos\,u,$$
$$cos\,(360^0 - u) = cos\,u$$

ist.

Damit ist die *Allgemeingiltigkeit der Fundamentalformeln für* **alle** *sphärischen Dreiecke ABC erwiesen, welche sich aus der beliebigen Wahl dreier Kugelpunkte ABC ergeben.*

Elementarsätze über sphärische Dreiecke.

153. Wegen der beherrschenden Rolle, welche die Kugeldreiecke in unserer Theorie spielen, sollen folgende Sätze in Erinnerung gebracht werden.

Jedem sphärischen Grunddreieck ABC ist durch die Gegenpunkte der Ecken ein *Gegendreieck* $A'B'C'$ zugeordnet. Offenbar ist:

$$a = a',\ b = b',\ c = c',\ \alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma';$$

denn die Gegenpunkte der Seite a bilden die Seite a', die Winkel α und α' sind Scheitelwinkel u. s. w., aber die Dreiecke lassen sich durch Verschiebung auf der Kugel *nicht* zur Deckung bringen.

Fig. 50.

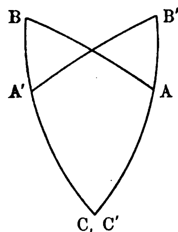


Fig. 51.

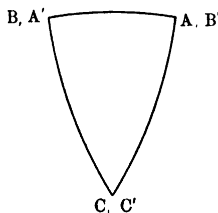
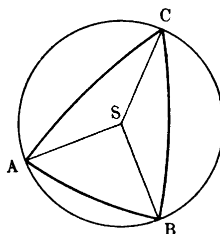


Fig. 52.



Verschiebt man eines derselben so, dafs nicht nur C und C', sondern auch ihre sphärischen Schenkel zusammenfallen, so entsteht die Fig. 50. Sind die Dreiecke gleichschenklig, so fallen A und B', A' und B zusammen, d. h. die Dreiecke decken sich (Fig. 51).

Gleichschenklige Gegendreiecke sind also congruent.

Die Ebene durch die Punkte ABC bestimmt einen Nebenkreis und dadurch eine Calotte mit dem Scheitel S (Fig. 52). Es ist also

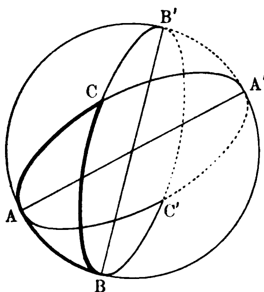
$$S\widehat{A} = S\widehat{B} = S\widehat{C},$$

und das sphärische Dreieck ABC ist in drei gleichschenklige Dreiecke mit der gemeinsamen Spitze S zerlegt. Ihre Gegendreiecke sind congruent, folglich *haben* ABC *und Gegendreieck* $A'B'C'$ *gleichen Flächeninhalt.*

154. Da die *Einheit der sphärischen Winkel* als Theil der Kugelfläche auch eine Fläche ist, so können wir sie als *Flächeneinheit* wählen für alle beliebigen Theile der Kugel. Ist der Grad die Einheit, so hat die Kugelfläche den Werth 360^0, die Halbkugelfläche den Werth 180^0, und unser Kugeldreieck soll den Werth F haben.

Der Kreis durch AB und seine Gegenpunkte $A'B'$ liege in der Ebene der Zeichnung (Fig. 53). Das Kugeldreieck ABC soll *über* dieser Ebene liegen und das Gegendreieck $A'B'C'$ *unterhalb* derselben. Die drei sphärischen Winkel $AA' = \alpha$, $BB' = \beta$, $CC' = \gamma$ werden durch je eine Seite des Dreiecks ABC in je zwei Theile, „*Nebendreiecke*“, getheilt. Ihre Summe $\alpha + \beta + \gamma$ ist also gleich dem dreifachen Flächeninhalt $ABC +$ dem Flächeninhalt der Dreiecke ABC', BCA', CAB'. Da ABC' und $A'B'C$ als Gegendreiecke gleich sind, so ist die Summe der Flächeninhalte der drei Nebendreiecke von ABC auch gleich $CBA' + CA'B' + CB'A$. Diese drei Dreiecke ergänzen sich mit ABC zu der über dem Kreise (A, B) gelegenen Halbkugel; also ist:

Fig. 53.



$$\alpha + \beta + \gamma = 3F + (180^0 - F) = 180^0 + 2F,$$

d. h.

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R + 2F,$$

wenn gesetzt wird $180^0 = 2R$.

Die Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R + 2F$$

sagt aus: wenn die drei sphärischen Winkel α, β, γ eines Kugeldreiecks ABC so neben einander gelegt werden, dafs ihre Scheitel zusammenfallen, so bilden sie einen sphärischen Winkel, welcher aus einer Halbkugel, d. h. einem gestreckten sphärischen

Winkel, und aus einem sphärischen Winkel φ besteht; dieser Winkel φ heifst der *sphärische Excefs* des Kugeldreiecks ABC, und es ist *der Flächeninhalt des sphärischen Excesses gleich dem doppelten Flächeninhalt seines Kugeldreiecks* ABC.

Durch den Excefs unterscheiden sich die sphärischen Dreiecke von den ebenen Dreiecken. Die drei Winkel des letzteren, so neben einander gelegt, dafs ihre Scheitel zusammenfallen, bilden stets einen gestreckten ebenen Winkel; es ist also kein Ueberschufs oder Excefs über einen gestreckten Winkel vorhanden.

In der Flächeneinheit des sphärischen Winkelgrades wird der Werth F des sphärischen Dreiecks mittels seiner im Gradmafs gegebenen Winkelwerthe α, β, γ ausgedrückt durch

$$F = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) - 90^0.$$

155. Bedeuten also α', β', γ' die Winkel des Polardreiecks von ABC, und ist F' der Flächeninhalt desselben, so ist:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 2R + 2F'.$$

Da

$$\alpha' = 2R - a, \quad \beta' = 2R - b, \quad \gamma' = 2R - c,$$

so folgt:

$$6R - (a + b + c) = 2R + 2F'$$

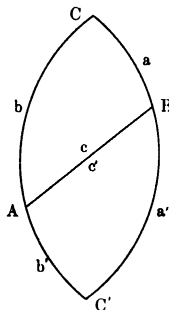
oder:

$$a + b + c = 4R - 2F',$$

d. h. *die Summe der Seiten eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als vier Quadranten oder ein Hauptkreis der Kugel.*

156. Jeder sphärische Winkel eines Kugeldreiecks ABC, z. B. der Winkel C, wird durch die gegenüberliegende Seite, also durch $\widehat{AB}$ (Fig. 54), in zwei Dreiecke zerlegt, deren eines ABC ist; das andere, in der Figur ABC', ist das *Nebendreieck* von ABC in Bezug auf $\widehat{AB}$; nennt man seine Seiten $a'b'c'$, so ist:

Fig. 54.



$$a' + b' + c' = a' + b' + c < 4R.$$

Andererseit sind CAC' und CBC' Halbkreise, also:

$$a' + b' + a + b = 4R,$$

folglich ist:

$$a + b > c,$$

d. h. *in einem sphärischen Dreieck ist die Summe zweier Seiten gröſser als die dritte.*

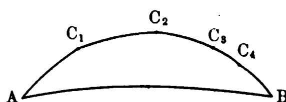


Fig. 55.

Ist $\widehat{AB}$ (Fig. 55) der Bogen eines gröſsten Kreises, und bewegt man sich *auſserhalb* des Bogens über die gröſsten Kreisbogen $\widehat{A_1C}$, $\widehat{C_1C_2}$, $\widehat{C_2C_3}$, $\widehat{C_4B}$, so ist nach dem Vorstehenden, wenn man sich die gröſsten Bogen $\widehat{AC_2}$, $\widehat{AC_3}$, $\widehat{AC_4}$ gezogen denkt:

$$\begin{array}{l} \widehat{AC_1} + \widehat{C_1C_2} > \widehat{AC_2} \\ \widehat{AC_2} + \widehat{C_2C_3} > \widehat{AC_3} \\ \widehat{AC_3} + \widehat{C_3C_4} > \widehat{AC_4} \\ \widehat{AC_4} + \widehat{C_4B} > \widehat{AB} \\ \hline \widehat{AC_1} + \widehat{C_1C_2} + \widehat{C_2C_3} + \widehat{C_3C_4} + \widehat{C_4B} > \widehat{AB}. \end{array}$$

Denkt man sich statt der Bogen $\widehat{AC_1}$, $\widehat{C_1C_2}$, $\widehat{C_2C_3}$, $\widehat{C_3C_4}$, $\widehat{C_4B}$ eine beliebige Curve, deren Elemente man als Elemente gröſster Kreise betrachtet, so tritt an die Stelle der vier Punkte $C_1\, C_2\, C_3\, C_4$ eine unbegrenzte Anzahl, und die linke Seite der vorstehenden Ungleichheit geht über in den *Curvenbogen* $\widehat{AB}$. Also ist *der Bogen* $\widehat{AB}$ *des gröſsten Kreises* (A, B) *die kürzeste Linie, welche auf der Kugel von* A *nach* B *gezogen werden kann.*

157. Aus (Nr. 156.)

$$b + c > a, \quad c + a > b, \quad a + b > c$$

folgt:

$$b \sim c < a, \quad c \sim a < b, \quad a \sim b < c,$$

wenn $m \sim n$ die numerische Differenz von m und n bedeutet.

Also: *die numerische Differenz zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als die dritte.*

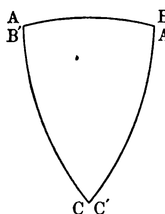


Fig. 56.

Ist Dreieck ABC (Fig. 56) gleichschenklig, so kann es mit seinem Gegendreieck $A'B'C'$ zur Coincidenz gebracht werden (Nr. 153.). Wir erhalten (Fig. 56):

$$\angle A = \angle B', \quad \angle A' = \angle B,$$

und da

$$\angle A = \angle A', \quad \angle A' = \angle A,$$

so folgt:

$$\angle A' = \angle B', \quad \angle A = \angle B.$$

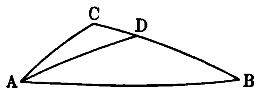
Es liegen also in einem gleichschenkligen Kugeldreieck gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

Betrachtet man das Dreieck als ein Polardreieck und schliefst auf das ursprüngliche, so folgt:

In einem Kugeldreieck mit zwei gleichen Winkeln liegen den letzteren gleiche Seiten gegenüber.

Ist in dem Kugeldreieck ABC (Fig. 57) $\angle A > \angle B$, so gibt es auf Bogen $\widehat{BC}$ einen Punkt D, für welchen $\angle DAB = \angle B$, also $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ wird. Es ist nun:

Fig. 57.



$$\widehat{AD} + \widehat{DC} > \widehat{AC},$$

$$\widehat{BC} = \widehat{BD} + \widehat{DC} = \widehat{AD} + \widehat{DC} > \widehat{AC},$$

$\widehat{BC} > \widehat{AC}$ sagt aus:

In einem Kugeldreieck liegt dem gröfseren Winkel die gröfsere Seite gegenüber.

Mittels des Polardreiecks folgt:

In einem Kugeldreieck liegt der gröfseren Seite der gröfsere Winkel gegenüber.

158. Ist ABC (Fig. 58) ein rechtwinkliges Kugeldreieck und $\gamma = 90^0$, so ist $\alpha + \beta + \gamma > 2R$ wegen des Excesses; also

$$\alpha + \beta > R,$$

d. h. *in einem rechtwinkligen Kugeldreieck ist die Summe der der Hypotenuse anliegenden Winkel* $> 90^0$.

Fig. 58.

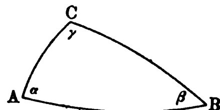
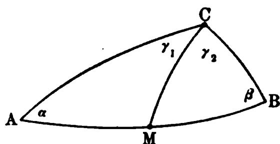


Fig. 59.



$\widehat{AB}$ (Fig. 59) ist der sphärische Durchmesser eines bestimmten Nebenkreises, C sei ein Punkt des letzteren und $\widehat{AB} < 90^0$, so ist $\angle C = \gamma$ *stumpf*. Denn weil $\widehat{AM} = \widehat{CM} = \widehat{BM}$, so ist $\alpha = \gamma_1$, $\beta = \gamma_2$, also:

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = 2(\gamma_1 + \gamma_2) = 2\gamma > 2R, \text{ d. h. } \gamma > R.$$

Wäre ABC ein *ebenes* Dreieck, C ein Punkt des Kreises mit dem Durchmesser $\overline{AB}$, so wäre $\gamma = R$.

Der Ort der Scheitel C, welche mit der spitzen Basis $\widehat{AB}$ ein rechtwinkliges Dreieck bestimmen, ist in Nr. 141. ermittelt worden.

Für ein rechtwinkliges Kugeldreieck mit der Hypotenuse c lieferte Tableau II in Nr. 136.:

	a	b	c	α	β	γ
21.	i	i	i	i	i	R
23.	u	u	i	u	u	R
22.	i	u	u	i	u	R
24.	u	i	u	u	i	R

Dies läſst sich folgendermaſsen aussprechen:

Ist in einem rechtwinkligen Kugeldreieck die Hypotenuse spitz, so sind die beiden Katheten und ihre gegenüberliegenden Winkel gleichzeitig entweder spitz oder stumpf.

Ist in einem rechtwinkligen Kugeldreieck die Hypotenuse stumpf, so ist die eine Kathete und ihr gegenüberliegender Winkel spitz, das andere Paar stumpf.

Das astronomische Dreieck.

159. Für einen bestimmten Zeitpunkt liefert der nördliche Himmelspol P, ein Zenit Z und ein Stern S ein bestimmtes Grunddreieck auf der Himmelskugel, welches das *astronomische Dreieck* genannt wird. Seine Basis $\widehat{PZ}$ bleibt unverändert mit der Zeit,

Fig. 60.

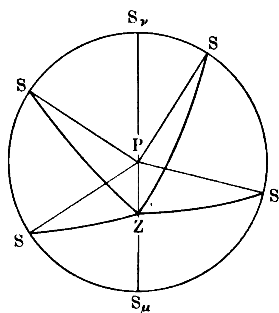
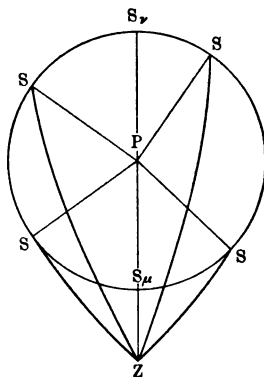


Fig. 61.



während seine Spitze S den Sternparallel beschreibt. In Folge dessen ändern sich die Seiten $\widehat{PS}$ und $\widehat{ZS}$, sowie sämmtliche Winkel, continuirlich, wie dies durch Fig. 60 und 61 für verschiedene Lagen des Sterns angedeutet ist.

Je nachdem S auf der westlichen oder östlichen Halbkugel des Meridians von Z liegt, unterscheiden wir *westliche* und *östliche* astronomische Dreiecke. Den Uebergang bildet die Lage des Sterns im oberen Meridian, d. h. die obere Culmination, und die Lage im unteren Meridian, d. h. die untere Culmination. In diesen beiden Fällen liegt die Spitze S des astronomischen Dreiecks auf dem durch seine Basis $\widehat{PZ}$ bestimmten Kreise.

160. In dem astronomischen Dreieck lassen sich die drei Seiten ausdrücken durch die Declination δ des Sternes, durch seine Zenitdistanz z und durch die geographische Breite φ des Zenits. Denn es ist stets:

$$\widehat{PS} = 90^0 - \delta, \quad \widehat{ZS} = z, \quad \widehat{PZ} = 90^0 - \varphi,$$

gleichviel, welchen Aequatorhalbkugeln Z und S angehören.

Wir setzen:

$$\angle Z = \alpha, \quad \angle P = \tau, \quad \angle S = \varkappa.$$

Der Winkel $\varkappa$ ist einer der vier sphärischen Winkel, welchen der Kreis (S, P) mit dem Kreis (S, Z) bestimmt, und zwar der-

Fig. 62.

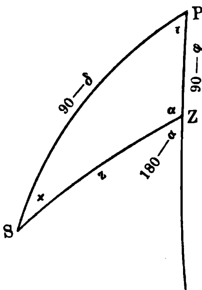
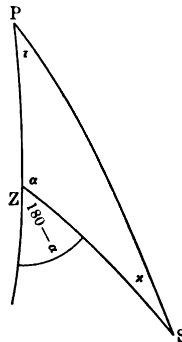


Fig. 63.



jenige Winkel, welcher den Bogen $\widehat{PZ} = 90^0 - \varphi$ enthält. Stundenkreis S, bezw. Vertical S ist ein Halbkreis von Kreis (S, P), bezw. Kreis (S, Z). Dreht man den durch S und seinen Gegenpunkt S' über P gelegten Halbkreis nach *rechts* zur Coincidenz mit dem Halbkreis SZS', so heifst der beschriebene Winkel der *parallaktische Winkel* q. Es ist also für ein *westliches* Dreieck (Fig. 62) $q = \varkappa$, für ein *östliches* Dreieck (Fig. 63) $q = 360^0 - \varkappa$, d. h. $\varkappa = 360^0 - q$.

Für ein *westliches* Dreieck ist τ der westliche Abstand des Stundenkreises S vom oberen Meridian, d. h. τ ist gleich dem

Stundenwinkel t des Sterns. Das Supplement von α, d. h. der Werth $180^0 - \alpha$, ist der im Sinne der Rechtsdrehung genommene Abstand des Sternverticals vom Vertical des Südpunktes. Dieser Abstand ist das *Azimut* a; also ist $180^0 - \alpha = a$ und $\alpha = 180^0 - a$.

Für ein *östliches* Dreieck (Fig. 63) ist τ der *östliche* Abstand des Stundenkreises S vom oberen Meridian und *Stundenwinkel* t der *westliche* Abstand. Es ist also $\tau + t = 360^0$, d. h. $\tau = 360^0 - t$. Das Supplement $180^0 - \alpha$ ist der im Sinne der Linksdrehung genommene Abstand des Sternverticals vom Vertical des Südpunktes, während der im Sinne der Rechtsdrehung genommene Abstand das *Azimut* a ist; es ist also:

$$(180^0 - \alpha) + a = 360^0, \text{ d. h. } a = 180^0 + \alpha \text{ und } \alpha = a - 180^0.$$

Wir erhalten demnach für die den Seiten z, $90^0 - \delta$, $90^0 - \varphi$ gegenüberliegenden Winkel eines *westlichen* Dreiecks: $\tau = t$, $\alpha = 180^0 - a$, $\varkappa = q$, bezw. eines *östlichen* Dreiecks: $\tau = 360^0 - t$, $\alpha = a - 180^0$, $\varkappa = 360^0 - q$.

Gemäfs Nr. 59. ist für Gradmafs:

$$\sin(360^0 - x) = -\sin x, \quad \cos(360^0 - x) = \cos x,$$
$$\sin(x - 180^0) = -\sin(180^0 - x) = -\sin x,$$
$$\cos(x - 180^0) = \cos(180^0 - x) = -\cos x.$$

Folglich wird für ein *westliches* Dreieck:

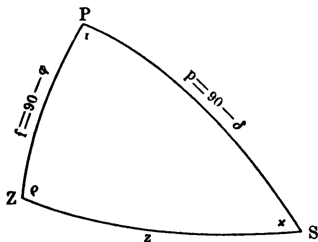
$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \sin\tau = \sin t, & \sin\alpha = \sin a, & \sin\varkappa = \sin q \\ \cos\tau = \cos t, & \cos\alpha = -\cos a, & \cos\varkappa = \cos q, \end{cases}$$

für ein *östliches* Dreieck:

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} \sin\tau = -\sin t, & \sin\alpha = -\sin a, & \sin\varkappa = -\sin q \\ \cos\tau = +\cos t, & \cos\alpha = -\cos a, & \cos\varkappa = +\cos q. \end{cases}$$

161. Durch Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf das astronomische Dreieck können die sechs Gröfsen φ, δ, z, q, a, t mit einander in Beziehung gesetzt werden. Und hierauf beruht die Möglichkeit, φ und t zu ermitteln, wenn z und δ bekannt sind.

Fig. 64.



Die Fundamentalformeln des astronomischen Dreiecks lassen sich ohne Weiteres nach den in Nr. 145. gegebenen Regeln hinschreiben, wenn

man die Seite $90^0 - \delta$ mit p, die Seite $90^0 - \varphi$ mit f bezeichnet und beim Niederschreiben $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ an Stelle von bezw. $\sin f$, $\cos f$ setzt und $\cos\delta$, $\sin\delta$ an Stelle von bezw. $\sin p$, $\cos p$. Man erhält dadurch:

I.
1. $\sin z \sin\alpha = \sin\tau \cos\delta$
2. $\cos\delta \sin\varkappa = \sin\alpha \cos\varphi$
3. $\cos\varphi \sin\tau = \sin\varkappa \sin z.$

II.
1. $\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\tau$
2. $\sin\delta = \sin\varphi \cos z + \cos\varphi \sin z \cos\alpha$
3. $\sin\varphi = \cos z \sin\delta + \sin z \cos\delta \cos\varkappa.$

III.
1. $\sin z \cos\alpha = \sin\delta \cos\varphi - \cos\delta \sin\varphi \cos\tau$
2. $\sin z \cos\varkappa = \sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos\tau$
3. $\cos\delta \cos\varkappa = \sin\varphi \sin z - \cos\varphi \cos z \cos\alpha$
4. $\cos\delta \cos\tau = \cos z \cos\varphi - \sin z \sin\varphi \cos\alpha$
5. $\cos\varphi \cos\tau = \cos z \cos\delta - \sin z \sin\delta \cos\varkappa$
6. $\cos\varphi \cos\alpha = \sin\delta \sin z - \cos\delta \cos z \cos\varkappa.$

Macht man in I., II., III. die durch (a) der vorigen Nummer gelieferten Substitutionen, so ist das Resultat dasselbe, als ob man statt der Argumente τ, α, $\varkappa$, bezw. die Argumente t, a, q setzt und *das Zeichen vor den mit* $\cos a$ *behafteten Termen umschlagen* läfst. Dadurch entstehen die für ein *westliches* Dreieck geltenden Gleichungen.

Macht man dagegen in I., II., III. die durch (b) gelieferten Substitutionen, so ist das Resultat dasselbe, als ob man statt der Argumente τ, α, $\varkappa$, bezw. die Argumente t, a, q setzt und *das Zeichen sowohl vor den mit* $\cos a$, *wie vor den mit* $\sin t$, $\sin a$, $\sin q$ *behafteten Termen umschlagen* läfst. Dadurch erhält man für das *östliche astronomische Dreieck genau dieselben Gleichungen wie für das westliche Dreieck.*

162. Die allgemein giltigen Gleichungen lauten nun:

(*A*)
1. $\sin z \sin a = \sin t \cos\delta$
2. $\cos\delta \sin q = \sin a \cos\varphi$
3. $\cos\varphi \sin t = \sin q \sin z.$

(*B*)
1. $\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$
2. $\sin\delta = \sin\varphi \cos z - \cos\varphi \sin z \cos a$
3. $\sin\varphi = \cos z \sin\delta + \sin z \cos\delta \cos q.$

$$(C)\quad\begin{aligned}
&1.\ \sin z\ \cos a = -\sin\delta\ \cos\varphi + \cos\delta\ \sin\varphi\ \cos t\\
&2.\ \sin z\ \cos q = \sin\varphi\ \cos\delta - \cos\varphi\ \sin\delta\ \cos t\\
&3.\ \cos\delta\ \cos q = \sin\varphi\ \sin z + \cos\varphi\ \cos z\ \cos a\\
&4.\ \cos\delta\ \cos t = \cos z\ \cos\varphi + \sin z\ \sin\varphi\ \cos a\\
&5.\ \cos\varphi\ \cos t = \cos z\ \cos\delta - \sin z\ \sin\delta\ \cos q\\
&6.\ \cos\varphi\ \cos a = -\sin\delta\ \sin z + \cos\delta\ \cos z\ \cos q.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen wird man bei allgemeinen Betrachtungen den Gleichungen I., II, III. vorziehen; letztere aber behalten für alle numerischen Rechnungen Bedeutung, weil sämmtliche Stücke $< 180^0$ sind und ihr Quadrant eindeutig aus dem Zeichen von Cosinus, Tangens und Cotangens ermittelt werden kann (Nr. 61.).

163. Die Giltigkeit der Gleichungen (A), (B), (C) für ein *östliches* Dreieck hätte auch folgendermafsen abgeleitet werden können.

Betrachtet man das *conjugirte Dreieck* (Nr. 152.) *des östlichen Dreiecks*, so bleiben die Seiten unverändert, während an Stelle von τ, α, $\varkappa$ die Winkel $\tau' = 360^0 - \tau$, $\alpha' = 360^0 - \alpha$, $\varkappa' = 360^0 - \varkappa$ treten. Da die Fundamentalgleichungen für *alle* Arten sphärischer Dreiecke gelten, so gelten die Systeme I., II., III., wenn darin τ', α', $\varkappa'$ an Stelle von τ, α, $\varkappa$ gesetzt wird. Es ist aber für das östliche Dreieck:

$$\tau' = t, \quad \alpha' = 360^0 + 180^0 - a, \quad \varkappa' = q.$$

Folglich gelten I., II., III., wenn darin t, $180^0 - a$, q an Stelle von τ, α, $\varkappa$ gesetzt wird. Das sind aber dieselben Substitutionen, welche für das westliche Dreieck gemacht wurden, also ist für beide Dreiecke das Resultat dasselbe.

164. Es bleibt dem Studirenden überlassen, die Systeme IV., V., VI., VII. (Nr. 147.) für das astronomische Dreieck aufzustellen.

Hier soll nur die Gleichung:

$$\text{VII. 31.}\qquad \sin b\ ctg\, a = \cos\gamma\ \cos b + ctg\,\alpha\ \sin\gamma$$

verwerthet werden. Werden darin für b, a, α, γ, bezw. die Werthe $90^0 - \varphi$, $90^0 - \delta$, α, τ gesetzt, so folgt:

$$1.\quad \cos\varphi\ tg\,\delta = \cos\tau\ \sin\varphi + ctg\,\alpha\ \sin\tau,$$

also auch:

$$2.\quad \cos\varphi\ tg\,\delta = \cos t\ \sin\varphi - ctg\, a\ \sin t.$$

Praktisch verwerthbare Gleichungen werden ferner durch die Napier'schen Analogien XI., 52, 55 (Nr. 151.) geliefert. Setzt man

darin für $a, b, \alpha, \beta, \gamma$, bezw. die Werthe $90^0 - \delta$, $90^0 - \varphi$, α, $\varkappa$, τ, so entsteht:

$$tg \frac{1}{2} (\alpha - \varkappa) = \frac{\sin \frac{1}{2} (\varphi - \delta)}{\cos \frac{1}{2} (\varphi + \delta)} ctg \frac{1}{2} \tau$$

$$tg \frac{1}{2} (\alpha + \varkappa) = \frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi - \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varphi + \delta)} ctg \frac{1}{2} \tau.$$

165. Führt man ein $\alpha' = 180^0 - \alpha$, d. h. den Abstand des Sternverticals vom Südpunktvertical, an Stelle des vom Nordpunktvertical genommenen Abstandes α, so erhält man:

(D)

$$1. \quad tg \frac{1}{2} (\alpha' - \varkappa) = \frac{\sin \frac{1}{2} (\varphi + \delta)}{\cos \frac{1}{2} (\varphi - \delta)} tg \frac{1}{2} \tau$$

$$2. \quad tg \frac{1}{2} (\alpha' + \varkappa) = \frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi + \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varphi - \delta)} tg \frac{1}{2} \tau.$$

Für Stern im Westen wird $\alpha' = a$, $\varkappa = q$, $\tau = t$; für Stern im Osten wird $\alpha' = 360^0 - a$, $\varkappa = 360^0 - q$, $\tau = 360^0 - t$. In beiden Fällen wird also:

(E)

$$3. \quad tg \frac{1}{2} (a - q) = \frac{\sin \frac{1}{2} (\varphi + \delta)}{\cos \frac{1}{2} (\varphi - \delta)} tg \frac{1}{2} t$$

$$4. \quad tg \frac{1}{2} (a + q) = \frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi + \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varphi - \delta)} tg \frac{1}{2} t.$$

Ist t gegeben und damit $\tau = t$ (West), bezw. $\tau = 360^0 - t$ (Ost), so erhält man aus E 1. und 2. *eindeutig* α' und $\varkappa$, weil α' und $\varkappa$ Concavwinkel sind. Denn falls $tg \frac{1}{2} (\alpha' - \varkappa)$ positiv ist, so ist $\frac{1}{2} (\alpha' - \varkappa)$ ein Winkel des I. Quadranten; ist der Aus-

druck dagegen negativ, so ist $\frac{1}{2}(\varkappa - \alpha')$ ein Winkel des I. Quadranten. Ist $tg\,\frac{1}{2}(\alpha' + \varkappa)$ positiv, bezw. negativ, so ist $\frac{1}{2}(\alpha' + \varkappa)$ ein Winkel des I., bezw. des II. Quadranten.

Aus α' und $\varkappa$ folgt alsdann $a = \alpha'$, $q = \varkappa$ für Stern im Westen; $a = 360^0 - \alpha'$, $q = 360^0 - \varkappa$ für Stern im Osten.

Ausgezeichnete Lagen des astronomischen Dreiecks.

166. Die allgemeinen Gleichungen des astronomischen Dreiecks erfahren wesentliche Vereinfachungen bei Durchtritten des Sterns durch gewisse ausgezeichnete Punkte seines Parallels.

Diese Punkte liegen entweder auf dem *Horizont*, sind also die mit A und U bezeichneten Punkte des *Auf- und Untergangs*, oder sie liegen auf dem *I. Vertical*, oder sie sind die *Berührungspunkte der beiden Verticale*, welche den Parallel berühren, d. h. *die Punkte der gröfsten Digression.*

a) Stern im Horizont.

167. Liegt der Stern im Horizont, so ist seine Zenitdistanz $z = 90^0$, $\cos z = 0$, $\sin z = 1$. Die Gleichung II. 1. der Nr. 161.:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\tau$$

kann also dann geschrieben werden:

$$\cos\tau = -\, tg\,\varphi\; tg\,\delta.$$

Hierin bezieht sich τ sowohl auf den Stundenkreis des Aufgangs A wie auf den des Untergangs U und bedeutet den Abstand eines jeden vom oberen Meridian.

Als Bedingung dafür, dafs ein Sternparallel den Horizont in zwei Punkten A und U schneidet, war in Nr. 91. gefunden worden:

$$(\varphi) + (\delta) < 90^0.$$

Diese Bedingung mufs identisch sein mit der in der letzten Gleichung enthaltenen. Die linke Seite verlangt, dafs $tg(\varphi)\, tg(\delta) < 1$ ist, wenn (φ) und (δ) die numerischen Beträge von φ und δ bezeichnen. Denn der numerische Betrag eines Cosinus liegt zwischen 0 und 1 (Nr. 52.). Nun ist:

$$tg(\varphi)\, tg(\delta) = tg(\varphi)\, ctg[90^0 - (\delta)] = \frac{tg(\varphi)}{tg\,[90^0 - (\delta)]}.$$

Soll der Ausdruck < 1 sein, so muſs

$$tg(\varphi) < tg\,[90^0 - (\delta)],$$

d. h.

$$(\varphi) < 90^0 - (\delta) \quad \text{oder} \quad (\varphi) + (\delta) < 90^0$$

sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so liefert

$$\cos\tau = -tg\,\varphi\; tg\,\delta$$

den Meridianabstand τ für jeden der Stundenkreise A und U.

Es ist demnach 2τ der westliche Abstand des Stundenkreises U vom Stundenkreise A, d. h. der *Werth des Tagbogens*, und $360^0 - 2\tau$ ist der *Werth des Nachtbogens.*

τ als Winkel eines sphärischen Grunddreiecks ist stets ein Concavwinkel, also ein Winkel des I. Quadranten, wenn $\cos\tau$ positiv ist, und ein Winkel des II. Quadranten, wenn $\cos\tau$ negativ ist.

Sind φ und δ gleichstimmig, d. h. $\varphi\,\delta$ plus, so ist $\cos\tau$ negativ und liegt τ zwischen 90^0 und 180^0, 2τ zwischen 180^0 und 360^0, folglich $360^0 - 2\tau$ zwischen 0^0 und 180^0; d. h. für $\varphi\,\delta$ *plus* ist der *Tagbogen gröſser als der Nachtbogen.* Für $\varphi\delta$ *minus* wird $\cos\tau$ positiv, τ ein Winkel des I. Quadranten, und dann tritt das Umgekehrte ein: *der Tagbogen ist kleiner als der Nachtbogen*, ganz in Uebereinstimmung mit dem Früheren. Wir hätten uns also die vier Zeichnungen auf S. 116 und die damit verknüpften Betrachtungen sparen können. Dieselben sind aber aus dem Grunde nicht überflüssig, weil ihr Verständniſs geometrische Anschauung fordert.

Aus τ folgen die Werthe der *Stundenwinkel für Auf- und Untergang.* Es ist

$$t = 360^0 - \tau \quad \text{für Aufgang,}$$
$$t = \tau \qquad\qquad \text{für Untergang.}$$

168. Aus II., 2. der Nr. 161.:

$$\sin\delta = \sin\varphi\,\cos z + \cos\varphi\,\sin z\,\cos\alpha$$

folgt für $z = 90^0$:

$$\cos\varphi\,\cos\alpha = \sin\delta$$
$$\cos\alpha = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}.$$

Hierin bedeutet α den Abstand des Verticals A, sowie des Verticals U vom Vertical des *Nordpunktes* N. $\widehat{AN}$ und $\widehat{UN}$ sind die zugeordneten Bogen, also ist $\alpha = \widehat{AN} = \widehat{UN}$; bezeichnet S den Südpunkt, so ist $180^0 - \alpha = \widehat{AS} = \widehat{US}$.

Der *Mittagspunkt* H_μ des Horizonts, d. h. sein Schnittpunkt mit dem oberen Meridian, ist der *Südpunkt* für einen *nördlichen* Horizont und der *Nordpunkt* für einen *südlichen Horizont*.

Für einen nördlichen Stern $+(\delta)$ wird $\cos\alpha$ positiv, d. h. α spitz (i), für einen südlichen Stern $-(\delta)$ wird $\cos\alpha$ negativ, d. h. α stumpf (u).

Es ist demgemäfs für

$$\begin{array}{lll} \varphi = +(\varphi), & \delta = +(\delta) : \widehat{AH_\mu} & (u) \\ & \delta = -(\delta) : \widehat{AH_\mu} & (i) \\ \varphi = -(\varphi), & \delta = +(\delta) : \widehat{AH_\mu} & (i) \\ & \delta = -(\delta) : \widehat{AH_\mu} & (u). \end{array}$$

Dasselbe gilt für die Abstände $\widehat{UH_\mu}$. Man ersieht hieraus: für $\varphi\,\delta$ *plus* ist der Abstand des Aufgangs (und des Untergangs) vom Mittagspunkte des Horizonts stumpf, für $\varphi\,\delta$ *minus* ist er spitz.

Dies ist der Grund, weshalb bei uns (nördliche Hemisphäre) die Sonne im Winter (südliche Declination) nicht im Osten, sondern zwischen Süd und Ost aufgeht, im Sommer dagegen (nördliche Declination) zwischen Nord und Ost.

Man nennt den Abstand A vom Ostpunkt die *Morgenweite*; den Abstand U vom Westpunkt die *Abendweite* des Gestirns; sie ist gegeben durch den numerischen Werth von $90^0 - \alpha$.

Für das *Azimut* a sowohl des *Aufgangs* wie des *Untergangs* liefert (B.) 2. der Nr. 162.

$$\sin\delta = \sin\varphi \cos z - \cos\varphi \sin z \cos a,$$

wenn $z = 90^0$ wird:

$$\sin\delta = -\cos\varphi \cos a,$$

d. h.

$$\cos a = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}.$$

b) Stern im I. Vertical.

169. Wenn ein Stern im I. Vertical, d. h. in dem Vertical des Ost- oder Westpunktes liegt, so ist $\alpha = 90^0$ (Abstand vom Vertical des Nordpunktes), $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$.

Es folgt also aus III., 1. der Nr. 161.:

$$\sin z \cos \alpha = \sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi \cos \tau$$

$$\cos \tau = \frac{tg\, \delta}{tg\, \varphi},$$

aus II., 2.:

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos z + \cos \varphi \sin z \cos \alpha$$

$$\cos z = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi},$$

aus I., 2:

$$\cos \delta \sin \varkappa = \sin \alpha \cos \varphi$$

$$\sin \varkappa = \frac{\cos \varphi}{\cos \delta}.$$

Die drei Ausdrücke für $\cos \tau$, $\cos z$, $\sin \varkappa$ sind nur dann möglich, wenn $(\varphi) > (\delta)$; nur dann werden dieselben echte Brüche (Nr. 52.).

Ferner sieht man, dafs im Falle von Gleichstimmigkeit, d. h. $\varphi\, \delta$ *plus*, τ und z einen positiven Cosinus besitzen, also beide spitz sind. Aus $z < 90^0$ folgt, dafs der Durchtritt durch den I. Vertical *sichtbar* ist.

Ist dagegen $\varphi\, \delta$ *minus*, so werden die Cosinus von τ und z negativ, τ und z stumpf, der Durchtritt *unsichtbar*.

Auch diese Resultate sind früher durch Anschauung erhalten worden (Nr. 94., Fig. 30).

Wendet man $(C.)$ 1., $(B.)$ 2., $(A.)$ 2. der Nr. 162. an und bedenkt, dafs $a = 90^0$, bezw. 270^0 wird, wenn $\alpha = 90^0$ ist, so folgt:

$$\cos t = \frac{tg\, \delta}{tg\, \varphi}, \qquad \cos z = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}, \qquad \sin q = \frac{\cos \varphi}{\cos \delta}.$$

c) *Stern auf den berührenden Verticalkreisen seines Parallels.*

170. Wenn auf einer Kugel ein Hauptkreis h und ein Nebenkreis mit dem sphärischen Mittelpunkt P (Nr. 90.) sich in einem Punkte D berühren, so liegen die Hauptkreise (P, D) und h normal. Also ist (Fig. 31, Nr. 95.) der sphärische Winkel $PD_s Z = \varkappa = 90^0$. Der Punkt D_s ist demnach im Sinne von Nr. 138. ein *Normalscheitel der spitzen Basis* $\widehat{PZ}$ und liegt auf dem Schnitt E der Kugel mit dem durch $\widehat{PZ}$ bestimmten elliptischen Kegel (Nr. 141.). *Diese sphärische Ellipse enthält die Punkte gröfster Digression für alle Parallele, welche den Bogen* $\widehat{PZ}$ *schneiden.*

Für den Fall der *gröſsten Digression* ist demnach $\varkappa = 90^0$, $q = 90^0$ oder $= 270^0$, und es liefern III. 2., I. 2., II. 3 der Nr. 161.:

$$\cos\tau = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\delta}, \qquad \sin\alpha = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}, \qquad \cos z = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}.$$

Hieraus ergibt sich, daſs $(\varphi) > (\delta)$ sein muſs. Ist $\varphi\,\delta$ *plus*, so werden τ und z spitz; ist $\varphi\,\delta$ *minus*, so werden τ und z stumpf, d. h. der Durchtritt des Sterns durch die Digressionspunkte ist im ersten Falle *sichtbar*, im zweiten *unsichtbar*.

Aus (C) 2., (A) 2., (B) 3. der Nr. 162. folgt:

$$\cos t = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\delta} \qquad \sin a = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi} \qquad \cos z = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}.$$

171. Wir haben also erhalten:

a) *für Auf- und Untergang* ($z = 90^0$)

$$\cos\tau = -tg\,\varphi\; tg\,\delta, \qquad \cos\alpha = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}$$

$t = 360^0 - \tau$, $a = 180^0 + \alpha$ für Aufgang A,
$t = \tau$, $a = 180^0 - \alpha$ für Untergang U,

b) *für den I. Vertical* ($\alpha = 90^0$)

$$\cos\tau = \frac{tg\,\delta}{tg\,\varphi}, \qquad \cos z = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}, \qquad \sin\varkappa = \frac{\cos\varphi}{\cos\delta},$$

$\varkappa$ spitz für ein nördliches Zenit, stumpf für ein südliches (siehe Fig. 30);

$t = 360^0 - \tau$, $q = 360^0 - \varkappa$ für den Ost-Vertical,
$t = \tau$, $q = \varkappa$ für den West-Vertical.

c) *für die Punkte gröſster Digression* ($\varkappa = 90^0$)

$$\cos\tau = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\delta}, \qquad \sin\alpha = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}, \qquad \cos z = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta},$$

α spitz für ein nördliches Zenit, stumpf für ein südliches (siehe Fig. 31);

$t = 360^0 - \tau$, $a = 180^0 + \alpha$ für die östliche Digression,
$t = \tau$, $a = 180^0 - \alpha$ für die westliche Digression.

172. Die unter a), b), c) abgeleiteten acht Gleichungen lassen sich verschiedentlich umformen, indem man jeder Seite der Gleichungen einmal $+1$, das andere Mal -1 hinzufügt und berücksichtigt, daſs $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{1}{2}x$ ist, $1 - \cos x$

$= 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$; oder auch, indem man $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ gegenseitig, mittels $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, durch einander ausdrückt.

Für die weitere Rechnung kommen dann die bekannten goniometrischen Formeln für $\sin(x \pm y)$, $\cos(x \pm y)$, $\sin x \pm \sin y$, $\cos x \pm \cos y$ (Nr. 63.) zur Anwendung.

Beispielsweise folgt aus den Ausdrücken für $\sin(\varphi + \delta)$ und $\sin(\varphi - \delta)$:

$$\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \delta) = \sin^2 \varphi \cos^2 \delta - \sin^2 \delta \cos^2 \varphi$$
$$= \sin^2 \varphi - \sin^2 \delta = \cos^2 \delta - \cos^2 \varphi,$$

und es ergibt sich aus

$$\cos \tau = - tg\, \varphi\, tg\, \delta:$$

$$1 + \cos \tau = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \tau = 1 - tg\, \varphi\, tg\, \delta$$
$$= \frac{\cos \varphi \cos \delta - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} = \frac{\cos(\varphi + \delta)}{\cos \varphi \cos \delta}$$
$$1 - \cos \tau = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \tau = 1 + tg\, \varphi\, tg\, \delta$$
$$= \frac{\cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \varphi \cos \delta},$$

also

$$tg^2 \frac{1}{2} \tau = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\varphi + \delta)}.$$

173. Es bleibt dem Leser überlassen, auf Grund des Voranstehenden die Umformungen selbst vorzunehmen, welche zu den folgenden Resultaten führen:

a) *Auf- und Untergang*: $z = 90^0$, $(\varphi) + (\delta) < 90^0$.

$$\cos \tau = - tg\, \varphi\, tg\, \delta, \quad tg^2 \frac{1}{2} \tau = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\varphi + \delta)}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}, \quad \varphi = 90^0 - \psi, \quad tg^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{tg \frac{1}{2} (\psi - \delta)}{tg \frac{1}{2} (\psi + \delta)}.$$

b) *I. Vertical*: $\alpha = 90^0$, $\varphi \delta$ plus, $(\varphi) > (\delta)$.

$$\cos \tau = \frac{tg\, \delta}{tg\, \varphi}, \quad tg^2 \frac{1}{2} \tau = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi + \delta)},$$

$$\sin^2 \tau = \frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \delta)}{\sin^2 \varphi \cos^2 \delta},$$

$$tg^2 \tau = \frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \delta)}{\cos^2 \varphi \sin^2 \delta},$$

$$\cos z = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}, \qquad tg^2\frac{1}{2}z = \frac{tg\frac{1}{2}(\varphi-\delta)}{tg\frac{1}{2}(\varphi+\delta)},$$

$$\sin^2 z = \frac{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)}{\sin^2\varphi},$$

$$tg^2 z = \frac{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)}{\sin^2\delta},$$

$$\sin\varkappa = \frac{\cos\varphi}{\cos\delta}, \qquad \cos^2\varkappa = \frac{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)}{\cos^2\delta}.$$

$$tg^2\varkappa = \frac{\cos^2\varphi}{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)}.$$

c) *Größte Digression*: $\varkappa = 90^0$, $\varphi\,\delta$ plus, $(\delta) > (\varphi)$.

$$\cos\tau = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\delta}, \qquad tg^2\frac{1}{2}\tau = \frac{\sin(\delta-\varphi)}{\sin(\delta+\varphi)},$$

$$\sin^2\tau = \frac{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}{\sin^2\delta\cos^2\varphi},$$

$$tg^2\tau = \frac{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}{\cos^2\delta\sin^2\varphi},$$

$$\sin\alpha = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}{\cos^2\varphi},$$

$$tg^2\alpha = \frac{\cos^2\delta}{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)},$$

$$\cos z = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}, \qquad tg^2\frac{1}{2}z = \frac{tg\frac{1}{2}(\delta-\varphi)}{tg\frac{1}{2}(\delta+\varphi)},$$

$$\sin^2 z = \frac{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}{\sin^2\delta},$$

$$tg^2 z = \frac{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}{\sin^2\varphi}.$$

Diese Formeln finden sich in den Tafeln von Albrecht, S. 4 u. 5 [1]). Hinzugefügt sind ersteren nur die Ausdrücke von $tg^2\frac{1}{2}\tau$ und $tg^2\frac{1}{2}z$ für die gröfste Digression.

[1]) Th. Albrecht, Formeln und Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. Leipzig 1894.

Sechster Abschnitt.

Das Universalinstrument und seine Fehlertheorie.

---

174. Die praktische Verwerthung der aus dem astronomischen Dreieck abgeleiteten Formeln beruht darauf, dafs von den darin auftretenden Gröfsen a, t, q, δ, z, φ einige gemessen, die anderen berechnet werden können. Der Zeitmoment, für welchen das astronomische Dreieck gilt, ist alsdann der Moment der Beobachtung.

Dasjenige Mefsinstrument, mittels dessen das *Azimut a* und die *Zenitdistanz z* eines Gestirns gefunden wird, heifst *Universalinstrument* und soll abgekürzt mit U. I. bezeichnet werden. Es ist das Beobachtungs-Instrument par excellence für jeden Reisenden, welcher genaue Messungen zum Zweck der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung vornehmen will; auch dient dasselbe für topographische Aufnahmen und trigonometrische Höhenmessungen. Deshalb ist die Theorie dieses Instrumentes für den Beobachter eben so wichtig, wie die Theorie der Disciplin, in deren Dienst es steht, und wird aus diesem Grunde nicht als Anhang an das Ende des Buches gestellt, sondern inmitten desselben, ehe die einzelnen Methoden zur Bestimmung der Zeit, der geographischen Breite und der geographischen Länge auseinandergesetzt werden.

Es handelt sich hierbei nicht um eine Beschreibung des Instrumentes, vielmehr wird angenommen, dafs einem Leser dieses Abschnitts ein U. I. zur Verfügung steht, und dafs ihm der Bau desselben, die Zusammenfügung seiner beiden Haupttheile, die Wirkung und Handhabung der einzelnen Schrauben, das Ablesen der getheilten Kreise und Libellen, endlich die doppelte Art, das

Fernrohr auf ein Object zu richten, in einem praktischen Cursus an dem Instrument selbst demonstrirt worden sind. Es handelt sich für uns ausschliefslich darum, zu zeigen, welche Principien dem Bau zu Grunde liegen, und auf welche Weise die bezweckten Messungsresultate zu Stande kommen.

Dies liefse sich kurz erledigen, unter der Voraussetzung, dafs das Instrument auch wirklich die zu Grunde liegenden Principien verkörperte, mit anderen Worten, dafs dasselbe *fehlerlos* wäre. Eine solche Voraussetzung entspricht aber der Wirklichkeit nicht genau, und deshalb müssen die Einflüsse der fehlerhaften Construction auf die Messungsresultate, die sogenannte „*Fehlertheorie*", eingehend berücksichtigt werden.

Das Fadenkreuz und die Collimationslinie des instrumentalen Fernrohrs.

175. Das Verständnifs des Folgenden wird wesentlich erleichtert, wenn man die Lectüre mit der Betrachtung eines aufgestellten U. I. verbindet, sich an demselben die Lage der verschiedenen Axen, Strahlen, Ebenen und Flügel, von denen die Rede sein wird, klar macht, die ins Spiel kommenden Drehungen an dem Instrument wirklich ausführt und sich Rechenschaft gibt von der dadurch bedingten Aenderung in der Lage des Fernrohrs und in den Ablesungen der getheilten Kreise.

Das Universalinstrument gehört zu der Klasse der zweiaxigen winkelmessenden Präcisionsinstrumente. Dieselben besitzen stets zwei in Grade und Unterabtheilungen getheilte Kreise und ein *Fernrohr*, welches mit einem sogenannten *Fadenkreuz* oder auch mit einem *Fadennetz* versehen ist.

Das einfache Fadenkreuz besteht aus zwei normal gespannten Fäden, das Fadennetz aus zwei Systemen von Fäden, welche denen des Fadenkreuzes parallel gespannt sind. Bei einem Fadennetz sind die Mittelfäden, welche das eigentliche Fadenkreuz liefern, meist ersetzt durch zwei Paare nahe gelegener Parallelfäden, zwischen denen das Auge die bisecirenden Mittelfäden einschaltet. Der Schnittpunkt der wirklich vorhandenen oder idealen Mittelfäden heifst die *Mitte des Fadenkreuzes* und werde mit M bezeichnet.

Bei einem für Beobachtungszwecke aufgestellten Universalinstrument läuft der eine Faden des Kreuzes horizontal und heifst der *Horizontalfaden*; der normal dazu gelegene heifst der *Verticalfaden*.

Bekanntlich werden die von einem *leuchtenden Punkte O* auf das Objectiv fallenden Strahlen innerhalb des Fernrohrs von Neuem in einem Punkte B vereinigt, welcher das *Bild* des leuchtenden Punktes O heifst.

Für die Objective kleinerer Fernrohre wird der *Abstand der beiden Knotenpunkte so klein*, dafs man statt ihrer eine Mittellage A als *optischen Mittelpunkt* einführen und sagen darf: die Gerade OB geht stets durch A.

Die Einrichtung des Fernrohrs (Verschiebbarkeit des Oculars gegen das Fadenkreuz innerhalb der Ocularröhre; Verschiebbarkeit der letzteren innerhalb der Objectivröhre) und seine Drehbarkeit um zwei Axen (Nr. 176.) gestatten 1. das Ocular in diejenige Stellung zu bringen, bei welcher der Beobachter die Netzfäden scharf und schwarz gezeichnet sieht, wenn das Fernrohr gegen den Himmel oder eine helle Wand gerichtet wird, 2. die Ocularröhre so zu verschieben und mit der Objectivröhre so zu drehen, dafs *Bildpunkt B und Fadenkreuzmitte M zusammenfallen.* Tritt dies ein, so sagt man: *das Object O* (leuchtender Punkt) *ist im Fernrohr eingestellt.*

Es liegen alsdann die drei Punkte MAO auf derselben Geraden f. Da zwei dieser Punkte, nämlich M und A, eine feste Lage in Bezug auf das Fernrohr besitzen, so hat auch f eine feste Lage im Fernrohr. Diese wichtige Gerade f heifst die *Collimationslinie* (eigentlich Collineationslinie) *des Fernrohrs*, und wir haben in Bezug auf dieselbe erkannt:

Ist ein leuchtender Punkt O auf die Mitte des Fadenkreuzes eingestellt, so liegt der vom Auge nach O gerichtete Visirstrahl in der Collimationslinie des Fernrohrs.

Das fehlerlose und fehlerlos aufgestellte Universal-Instrument.

176. Das ideale, nur in unserer Vorstellung existirende Universalinstrument ist der Träger folgender geometrischer Axen, Geraden und Strahlen:

a) einer *vertical* gestellten Axe I.

b) einer *horizontalen* Axe II., welche normal zu der Axe I. liegt, dieselbe in einem Punkte J schneidet und um I. drehbar ist.

c) einer *Collimationslinie*, welche *normal zu der Axe II.* liegt, dieselbe in einem Punkte F schneidet und um II. drehbar ist.

d) einer Geraden III., welche *der Collimationslinie stets parallel* bleibt und die Axe II. im Punkte J schneidet.

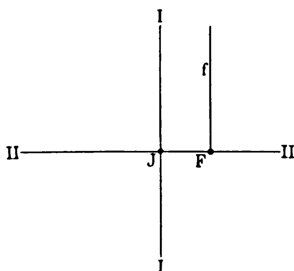
J heifst der *Mittelpunkt des Instruments.*

Durch J werden die Geraden I., II., III. in je zwei J-Strahlen getheilt. Unter *Strahl I.* soll der aufwärts gerichtete J-Strahl von I., identisch mit dem Verticalstrahl von J, verstanden werden.

Von der Collimationslinie betrachten wir nur den *Strahl* f, welcher von F aus gegen das Objectiv gerichtet ist, und von der Geraden III. nur den *J-Strahl III.*, welcher dem Strahl f parallel ist. Strahl III. ist also ein Strahl des durch J bestimmten Strahlenbüschels (Nr. 46.). Wir werden zunächst erkennen, dafs Strahl f vermöge der Drehungen, welche das Instrument gestattet, *einem beliebigen J-Strahl s parallel gestellt werden kann,* und darauf, wie sich „Azimut und Zenitdistanz von Strahl s" für die gegebene Lage des Fernrohrs mittels der getheilten Kreise des U. I. bestimmen lassen.

177. In dem Diagramm (Fig. 65) liegt die Ebene der Axen I. und II. in der Ebene der Zeichnung. Der Strahl f ist dem Strahl I. parallel gedreht, folglich mufs Strahl III. mit Strahl I. zusammenfallen. Weil der Schnittpunkt F der Collimationslinie f mit II. nicht in dem Centrum J liegt, so heifst das Fernrohr *excentrisch gelegen.* Die anzustellende Betrachtung gilt aber auch für ein centrisch gelegenes Fernrohr, denn dieser Fall entsteht aus dem anderen, wenn überall da, wo die Strecke $\overline{JF} = \varrho$ in den Formeln auftritt, $\varrho = 0$ gesetzt wird.

Fig. 65.



Axe I. führt den Namen *Abscissenaxe* oder *Verticalaxe.* Ein Flügel der Flügelschaar I. soll als ein *Ordinatenflügel* des Instruments bezeichnet werden. Concentrisch und normal zu I. befindet sich ein getheilter Kreis: der *Abscissen-*, *Horizont- oder*

Azimutalkreis. Derselbe gestattet es, die *Drehungswinkel eines Ordinatenflügels zu messen.*

Axe II. heifst die *Ordinatenaxe* oder *Horizontalaxe.* Ein Flügel der Flügelschaar II. soll als ein *Höhenflügel* bezeichnet werden. Concentrisch und normal zu II. befindet sich ein getheilter Kreis: der *Ordinaten- oder Höhenkreis.* Derselbe gestattet es, die *Drehungswinkel eines Höhenflügels zu messen.*

Strahl III., welcher durch den Mittelpunkt J geht und dem excentrischen Collimationsstrahl f stets parallel bleibt, soll der *centrische Collimationsstrahl* heifsen.

Der centrische und der excentrische Collimationsstrahl bestimmen *denselben* Höhenflügel. Letzterer wird als der *drehbare Höhenflügel* f bezeichnet, weil er den drehbaren Strahl f enthält.

178. Mittels des Drehflügels f läfst sich für die beiden J-Strahlen der Horizontalaxe II. eine Unterscheidung festsetzen, nämlich so: *jeder Lage des Höhenflügels f entspricht eine bestimmte Ablesung H des Höhenkreises*, also können die beiden Drehungen des Höhenflügels danach unterschieden werden, ob die *Ablesungen wachsen oder abnehmen.* Betrachtet man die *Drehung mit wachsenden Ablesungen*, so wird dieselbe von dem *einen* Ende der Axe II. als *Linksdrehung*, von dem *anderen* Ende als *Rechtsdrehung* erscheinen; das letztere soll das *K-Ende der Ordinatenaxe* heifsen und der nach K gerichtete J-Strahl der *k-Strahl der Horizontalaxe II.*

Der k-Strahl bestimmt einen Ordinatenflügel k, und weil k um I. drehbar ist, so soll dieser Flügel der *drehbare Ordinatenflügel k* heifsen. *Jeder Lage desselben entspricht eine bestimmte Ablesung A des Azimutalkreises.*

Für beide Drehflügel sind Lage und Ablesung eindeutig einander zugeordnet. Deshalb soll unter *Ordinatenflügel A*, bezw. unter *Höhenflügel H* derjenige Flügel verstanden werden, mit welchem Drehflügel k, bezw. Drehflügel f bei Ablesung A, bezw. Ablesung H coincidirt.

Vollführt der drehbare Höhenflügel eine Umdrehung um II., so beschreibt der centrische Collimationsstrahl III. die Normalebene der Axe II. im Punkte J. Diese Ebene geht durch I. und besteht deshalb aus zwei Ordinatenflügeln; derjenige Flügel, welcher rechts von I. liegt, wenn das Auge sich im K-Ende von

II. befindet, soll der *Collimationsflügel R* heifsen, der andere der *Collimationsflügel L*. Beide sind unverrückbar gegen Axe II. und drehen sich mit dieser, wenn um I. gedreht wird, d. h. wenn der Ordinatenflügel k eine Drehung ausführt. Strahl III. liegt stets entweder auf R oder auf L.

179. Es sei s ein beliebiger Strahl des Strahlenbüschels J. Dann kann der Ordinatenflügel k mit R und L so gedreht werden, dafs s ein Strahl des Collimationsflügels R wird. Dieser Lage entspreche die Ablesung A_r des Azimutalkreises. Bei einer Drehung des centrischen Collimationsstrahls III. um II. tritt derselbe durch alle J-Strahlen von R. *Es kann also III. durch eine passende Drehung des Höhenflügels f zur Coincidenz mit s auf dem Flügel R gebracht werden.* Dadurch wird Strahl f *parallel* dem J-Strahl s. Dieser Lage entspreche die Ablesung H_r des Höhenkreises.

In durchaus analoger Weise kann *III. auf dem Collimationsflügel L zur Coincidenz mit s*, und f in *Parallelstellung* zu s *gebracht* werden. Es seien A_l und H_l die Ablesungen der dadurch bedingten Lagen des drehbaren Ordinaten- und Höhenflügels.

Findet die Coincidenz des Strahles s mit dem centrischen Collimationsstrahl auf dem Collimationsflügel R statt, so soll die dadurch bedingte Lage des Fernrohrs als eine *Einstellung* bei *Kreis Rechts*, abgekürzt K. R., bezeichnet werden; analog als Einstellung bei *Kreis Links*, abgekürzt K. L., wenn die Coincidenz auf dem Collimationsflügel L stattfindet. Diese Bezeichnungen erklären sich aus der Construction des U. I. Bei K. R. liegt, wenn man vor das Ocular des Fernrohrs tritt, der getheilte Höhenkreis *rechts vom Fernrohr*, bei K. L. *links davon.*

Für den Strahlenbüschel J soll folgendes Polar-Coordinatensystem (Nr. 44. und 46.) eingeführt werden.

Axe der Ordinatenflügel: *die Verticalgerade von J*; die Ordinatenflügel sind also Verticalflügel.

Abscissenebene: *die Horizontebene von J.*

Ursprung der Ordinatenflügel: *der Verticalflügel des Südstrahles von J* (Nr. 69., S. 93).

Positive Flügeldrehung: *rechts herum*, von *oben* betrachtet.

Positive Raumhälfte: *die Hälfte oberhalb des Horizonts.*

Dieses System heifst das *azimutale Polar-Coordinatensystem des Instrumentes.*

Die Polar-Abscisse a eines Strahles s heifst sowohl das *Azimut von* s wie von dessen *verticalem Ordinatenflügel.* Die *Polar-Ordinate* b von s heifst die *algebraische* (positive oder negative) *Neigung des Strahles gegen die Horizontebene.* Ist b positiv, bezw. negativ, so hat der Strahl s die steigende, bezw. fallende Richtung. Ist (b) der numerische Werth von b (Gradmafs), so hat s die Neigung (b), bezw. das Gefälle (b). $z = 90^0 - b$ heifst der *Verticalabstand* oder die *Zenitdistanz* von s.

Wird die Himmelskugel von dem Verticalstrahl im Punkte Z, von dem Strahl s im Punkte S getroffen, so ist a das sphärische Azimut, z die sphärische Zenitdistanz von S für das sphärische Horizontalsystem von Z (Nr. 86.).

Der Ordinatenflügel R hat von dem Ordinatenflügel k für jede Lage von II. Quadrantenabstand nach *links,* der Ordinatenflügel L stets Quadrantenabstand nach *rechts.* Da die Azimute eines Ordinatenflügels bei Rechtsdrehung wachsen, so ist das *Azimut von R* und der in R gelegenen J-Strahlen um 90^0 *kleiner, als das des Strahles k und des Ordinatenflügels k,* dagegen das *Azimut von L um 90^0 gröfser.*

Ausdrücke für Azimut und Zenitdistanz eines J-Strahles s durch die Ablesungen A und H, wenn f und s parallel werden.

180. Für den Strahl s hatten wir die Ablesung des Azimutalkreises bei K. R. mit A_r, bei K. L. mit A_l bezeichnet. Wird der Ordinatenflügel k in den *Südstrahl von J* gedreht, so soll M die Ablesung des Azimutalkreises sein. Wird Flügel k aus dieser Lage rechts herum in den Ordinatenflügel A_r gedreht, so ist gemäfs der Bezeichnungsweise in Nr. 80. $(A_r - M)^0_{360}$ der nach rechts genommene Abstand des Ordinatenflügels A_r von dem Ordinatenflügel des Südpunktes. Es ist also $(A_r - M)^0_{360}$ das Azimut des Ordinaten- oder Verticalflügels A_r. Das Azimut des Verticalflügels R, in welchem der Strahl s bei dieser Einstellung liegt, ist um 90^0 kleiner. Bezeichnen wir das Azimut des Strahles s mit a, so wird:

$$a = (A_r - M - 90)^0_{360}.$$

Für den Ordinatenflügel L ergibt sich analog:

$$a = (A_l - M + 90)^0_{360}.$$

Es wird in Nr. 185. gezeigt werden, wie die Ablesung M durch astronomische Beobachtungen gefunden werden kann. Gilt M als bekannt, so ergibt sich aus den vorstehenden Formeln das Azimut a des Strahles s sowohl durch Einstellung bei K. R. wie durch Einstellung bei K. L.

Auch die Zenitdistanz z des Strahles s läfst sich in doppelter Weise ermitteln.

Es sei P die Ablesung des Höhenflügels, wenn derselbe den Verticalstrahl I. enthält. Ist der Strahl s bei K. R. eingestellt, so hat der Höhenflügel von s die Ablesung H_r. Da die Ablesungen *wachsen*, wenn der drehbare Höhenflügel aus Lage P in Lage H_r gedreht wird, so ist $(H_r - P)^0_{360}$ der Werth des Drehungswinkels; der Verticalstrahl I. und der Strahl s liegen normal zu der Kante II. des Drehungswinkels, also ist

$$z = (H_r - P)^0_{360}$$

die Zenitdistanz des Strahles s.

Liegt s in dem Collimationsflügel L, so *fallen* die Ablesungen des Höhenflügels, wenn er aus Lage P in Lage H_l gedreht wird, also ist

$$z = (P - H_l)^0_{360}.$$

Es wird in Nr. 187. gezeigt werden, wie sich P durch Beobachtungen desselben terrestrischen Objects finden läfst. Gilt P als bekannt, so ergibt sich aus den vorstehenden Formeln die Zenitdistanz z des Strahles s sowohl durch Einstellung bei K. R. wie bei K. L.

181. Unter der Voraussetzung, dafs die Ablesung M des Azimutalkreises und die Ablesung P des Höhenkreises bekannt sind, hat sich folgendes Resultat ergeben.

Ist der Mittelpunkt J des U. I. das Centrum eines Strahlenbüschels J, und s ein beliebiger Strahl desselben, so läfst sich der Collimationsstrahl f des excentrischen Fernrohrs auf doppelte Art dem Strahl s parallel stellen, bei K. R. und K. L. Mittels der dadurch gelieferten Ablesungen sowohl des Azimutal- wie des Höhenkreises ergeben sich daraus, sowohl für das Azimut a wie für die Zenitdistanz z des Strahles s zwei verschiedene Ausdrücke, nämlich:

K. R. $\quad a = (A_r - M - 90)^0_{360}, \quad z = (H_r - P)^0_{360}$

K. L. $\quad a = (A_l - M + 90)^0_{360}, \quad z = (P - H_l)^0_{360}.$

Einstellung auf einen leuchtenden Punkt. Azimut und Zenitdistanz seines centrischen Visirstrahls.

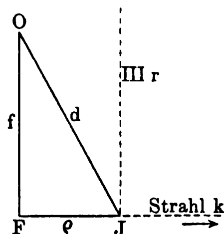
182. Wird das Fernrohr auf einen leuchtenden Punkt O eingestellt, so fällt die Visirlinie $\overline{FO}$ zusammen mit dem excentrischen Collimationsstrahl f. Azimut und Zenitdistanz des centrischen Collimationsstrahles III. können also durch die Ablesungen der getheilten Kreise gefunden werden.

Es sollen $a_r\, z_r$ die beiden Coordinaten des J-Strahles III r bezeichnen, welcher dem Collimationsstrahl f bei Einstellung K. R. parallel ist; $a_l\, z_l$ das Analoge für den J-Strahl III l, welcher durch Einstellung des Fernrohres auf O bei K. L. geliefert wird. Es ist dann stets $z_r = z_l$, weil Strahl f ($= \overline{FO}$) bei K. R. und K. L. symmetrische Lagen erhält in Bezug auf den Ordinatenflügel des Strahles $\overline{JO}$.

Es kommt nun darauf an, das Azimut a und die Zenitdistanz z des *centrischen Visirstrahls* $\overline{JO}$ aus den Coordinaten $a_r\, z_r$, bezw. $a_l\, z_l$ des Strahles III r, bezw. III l abzuleiten. Erst dadurch wird der *eigentliche Zweck* des U. I. erfüllt: *Azimute und Zenitdistanzen der Visirstrahlen zu finden, welche sich von dem Mittelpunkt J des Instrumentes nach leuchtenden, durch das Fernrohr einstellbaren Punkten ziehen lassen.*

183. Zur Bestimmung von a und z aus a_r, bezw. a_l und aus z_r, bezw. z_l bilden wir Ausdrücke für die Differenzen $a - a_r$ und $z - z_r$, bezw. $a - a_l$ und $z - z_l$.

Fig. 66.



Hierbei ist Folgendes zu beachten: stellt man sich bei einer Einstellung K. R. vor das Ocular und die Horizontalaxe II., so liegt der Punkt F des excentrischen Collimationsstrahles *links* vom Mittelpunkt J, dagegen für K. L. *rechts* davon. Das nebenstehende Diagramm (Fig. 66) in der Ebene (f, d) gilt also für K. R. Es ist enorm übertrieben, weil die Strecke $\overline{JF} = \varrho$ stets klein ist — in den meisten Fällen verschwindend klein — im Verhältnifs zu der Entfernung d des Objectes O von dem Mittelpunkt J. Wird in dem bei F rechtwinkligen Dreieck JFO der $\angle\, O = \delta\omega$ gesetzt, so ist:

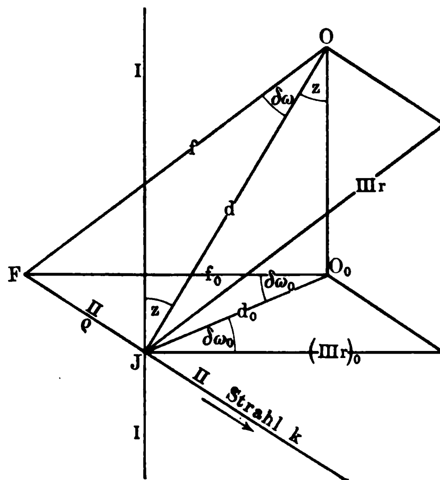
$$\sin \delta\omega = \frac{\varrho}{d}.$$

Wegen der Kleinheit von $\frac{\varrho}{d}$ darf gesetzt werden $\frac{\varrho}{d} = \delta\omega$ (Einheit des Bogenmafses); also:

$$\delta\omega'' = \frac{1}{\sin 1''}\,\frac{\varrho}{d} = 206\,265\,\frac{\varrho}{d},$$

denn $\frac{1}{\sin 1''} = 206\,265$ ist der Factor, mittels dessen ein im Bogenmafs gegebener Werth in der Einheit der Bogensecunde ausgedrückt wird.

Fig. 67.



In Fig. 67 ist das Dreieck JFO perspectivisch gezeichnet. Das gleichfalls bei F rechtwinklige Dreieck JFO_0 ist die Projection des Dreiecks JFO auf die Horizontebene der horizontalen Axe II.

Das bei O_0 rechtwinklige Dreieck JO_0O liefert:

$$\overline{JO_0} = d_0 = d \sin z;$$

denn $\angle O$ ist gleich $\angle$ (I, d), dessen Werth die Zenitdistanz z des Strahles d ist.

Dreieck JFO_0 liefert, wenn $\angle O_0 = \delta\omega_0''$ gesetzt wird:

$$\sin \delta\omega_0'' = \frac{\varrho}{d_0} = \frac{\varrho}{d}\,\mathrm{cosec}\, z,$$

wofür im Allgemeinen gesetzt werden darf:

$$\delta\omega_0'' = \frac{1}{\sin 1''}\,\frac{\varrho}{d}\,\mathrm{cosec}\, z = 206\,265\,\frac{\varrho}{d}\,\mathrm{cosec}\, z.$$

Die Projection des Winkels (d, f) hat den Werth $\delta\omega_0''$ und ist gleich der Projection des Winkels $(d, \mathrm{III}\,r)$; letztere ist der dem Raumwinkel der Ordinatenflügel d und $\mathrm{III}\,r$ zugeordnete Ebenewinkel; d. h. $\delta\omega_0''$ ist der Abstand dieser beiden Flügel, also gleich der numerischen Differenz $a \sim a_r$ ihrer Azimute.

Man sieht ferner aus der Figur, dafs das Azimut a des centrischen Visirstrahles d um $\delta\,\omega_0''$ kleiner ist als das Azimut a_r des Strahles III r. Denn der durch d gelegte verticale Ordinatenflügel mufs noch um diesen kleinen Winkel nach rechts, d. h. im Sinne der wachsenden Azimute gedreht werden, wenn er zur Coincidenz mit dem Verticalflügel von III r gelangen soll.

Es wird also für

K. R. $$a - a_r = -\delta\,\omega_0'' = -206\,265\,\frac{\varrho}{d}\,cosec\,z,$$

und auf Grund einer analogen Betrachtung für

K. L. $$a - a_l = +\delta\,\omega_0'' = +206\,265\,\frac{\varrho}{d}\,cosec\,z;$$

hierin darf, auf Grund von Nr. 186., z_r, bezw. z_l an Stelle von z in $\delta\,\omega_0$ gesetzt werden.

184. Ist ein *irdisches Object* O bei K. R. eingestellt, so hat der dem Collimationsstrahl f parallele J-Strahl III r das Azimut a_r, und es ist nach Nr. 181.:

$$a_r = (A_r - M - 90)^0_{360}.$$

Der Strahl JO hat das Azimut a, und es ist (Nr. 183.):

$$a - a_r = -\delta\,\omega_0'',\quad \delta\,\omega_0'' = \frac{\varrho}{d}\,\frac{1}{sin\,1''}\,cosec\,z_r.$$

Dementsprechend wird für

K. R. $$a = \left[A_r - M - 90^0 - \left(\frac{\varrho}{d}\,\frac{1}{sin\,1''}\right)''cosec\,z_r\right]^0_{360},$$

und analog für

K. L. $$a = \left[A_l - M + 90^0 + \left(\frac{\varrho}{d}\,\frac{1}{sin\,1''}\right)''cosec\,z_l\right]^0_{360},$$

wo ϱ und d als bekannt vorausgesetzt werden.

Der Werth von $\delta\,\omega_0$ *verschwindet stets*, wenn das Object O ein *Stern* ist. Denn ϱ ist meist nicht gröfser als 15 Centimeter, und d wird zum Gestirnsabstand.

Es ist also für *Gestirne*:

K. R. $$a = (A_r - M - 90)^0_{360}$$

K. L. $$a = (A_l - M + 90)^0_{360},$$

wenn die Einstellung des Sterns bei K. R. die Ablesung A_r, bei K. L. die Ablesung A_l des Azimutalkreises geliefert hat.

185. Coincidirt f bei K. R., bezw. bei K. L. mit dem Südstrahl von F in jeder der beiden Lagen, so ist der durch J gelegte Parallelstrahl III. nichts anderes als der Südstrahl von J.

Derselbe hat das Azimut $a = 0$. Bezeichnet $A_{r,0}$, bezw. $A_{l,0}$ die Ablesung des Azimutalkreises, so entsteht:

$$0 = A_{r,0} - M - 90^0, \qquad 0 = A_{l,0} - M + 90^0$$

aus:

$$a = (A_r - M - 90^0)^0_{360}, \qquad a = (A_l - M + 90^0)^0_{360},$$

woraus folgt:

$$a = (A_r - A_{r,0})^0_{360}, \qquad a = (A_l - A_{l,0})^0_{360}.$$

Die Werthe $A_{r,0}$ $A_{l,0}$ werden wie folgt erhalten, wenn man einen Stern zu bekannter Zeit bei K. R. und K. L. einstellt.

Es sei für die Beobachtung bei K. R. a_1 das Azimut, A'_r die notirte Ablesung, t_1 der bekannte Stundenwinkel des Sterns. Man kann a_1 mittels der Formeln (E) der Nr. 165. berechnen und erhält alsdann:

$$A_{r,0} = (A'_r - a_1)^0_{360}.$$

Ist für K. L. a_2 das Azimut, A''_l die Ablesung, t_2 der Stundenwinkel, so folgt:

$$A_{l,0} = (A''_l - a_2)^0_{360}.$$

Man ist nunmehr im Stande, das Azimut eines Objects aus der Ablesung zu finden, indem man setzt:

$$- M - 90^0 = - A_{r,0}, \quad - M + 90^0 = - A_{l,0},$$

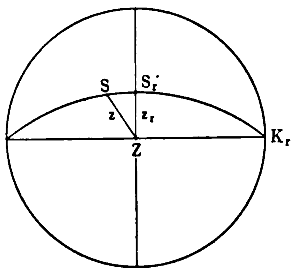
wodurch die Gleichungen der Nr. 184. übergehen in:

$$\text{K. R.:} \qquad a = \left[A_r - A_{r,0} - \left(\frac{\varrho}{d}\, 206\,265\right)'' cosec\, z\right]^0_{360}$$

$$\text{K. L.} \qquad a = \left[A_l - A_{l,0} + \left(\frac{\varrho}{d}\, 206\,265\right) cosec\, z\right]^0_{360}.$$

$A_{r,0}$ heifst die *Meridianablesung* des Azimutalkreises für K. R., $A_{l,0}$ das Analoge für K. L.

Fig. 68.



186. Legt man um Punkt J der Fig. 67 eine Kugel, so erhält man die nebenstehende Fig. 68, in welcher bedeutet:

Z den Schnittpunkt des Verticalstrahls I.,

S den Schnittpunkt des centrischen Visirstrahls d für O,

S_r den Schnittpunkt des J-Strahls III r (parallel zu $F\,O$),

K_r den Schnittpunkt des k-Strahles der Axe II.

Die Figur entspricht der Einstellung des leuchtenden Punktes O bei K. R. Es ist also:

$$\widehat{S S_r} = \delta\omega \qquad \widehat{Z S} = z \qquad \widehat{Z S_r} = z_r.$$

Das sphärische Dreieck $Z S_r S$ ist bei S_r rechtwinklig; denn die Ebene (d, III r), welche den Kreis (S, S_r) liefert und die Axe II. enthält, liegt normal zu der Ebene (I, III r), welche den Kreis (Z, S_r) liefert und die Axe I. enthält; also liegen die Kreise (Z, S_r) und (K_r, S_r) normal. Es ist deshalb:

$$\cos z = \cos z_r \cos\delta\omega = \cos z_r - 2\sin^2\frac{1}{2}\delta\omega\cos z_r.$$

Da

$$\cos z - \cos z_r = -2\sin\frac{1}{2}(z - z_r)\sin\frac{1}{2}(z + z_r)$$

ist, so wird:

$$\sin\frac{1}{2}(z - z_r) = \sin^2\frac{1}{2}\delta\omega\frac{\cos z_r}{\sin\frac{1}{2}(z + z_r)}.$$

Wegen des Gliedes $\sin^2\frac{1}{2}\delta\omega$ ist $\frac{1}{2}(z - z_r)$ so klein, dafs rechts gesetzt werden darf $z_r = z$, wodurch entsteht:

$$\sin\frac{1}{2}(z - z_r) = \sin^2\frac{1}{2}\delta\omega\, ctg\, z_r.$$

Nun darf weiter gesetzt werden:

$$\sin\frac{1}{2}(z - z_r) = \frac{1}{2}(z - z_r)''\sin 1''$$

$$\sin\frac{1}{2}\delta\omega = \frac{1}{2}\delta\omega''\sin 1'' = \frac{1}{2}\frac{\varrho}{d}.$$

Dies eingesetzt liefert:

$$(z - z_r)''\sin 1'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{d}\right)^2 ctg\, z_r$$

oder

$$(z - z_r)'' = \frac{1}{2}\,206\,265\left(\frac{\varrho}{d}\right)^2 ctg\, z_r.$$

Während $a - a_r$ und $a - a_l$ durch $\frac{\varrho}{d}$ in der ersten Potenz ausgedrückt werden konnten, enthält $z - z_r = z - z_l$ diese

kleine Zahl in der zweiten Potenz, so dafs es im Allgemeinen erlaubt sein wird, zu setzen:

$$z = z_r = z_l.$$

Man kann also in den Ausdrücken für $a - a_r$ und $a - a_l$ z_r und z_l an Stelle von z nehmen.

Es wird in praxi kaum vorkommen, dafs $z < 45^0$ wird, d. h. dafs $cosec\, z$ den Werth $cosec\, 45^0 = 1{,}4142$, $ctg\, z$ den Werth $ctg\, 45^0 = 1$ erreicht.

187. Die beiden J-Strahlen, welche dem Collimationsstrahl f des Fernrohrs in den beiden verschiedenen Lagen der Einstellung bei K. R. und K. L. parallel sind, waren mit III r und III l bezeichnet worden. III r liegt auf dem Collimationsflügel R, III l auf L, in gleichen Abständen von dem Verticalstrahl I. Die Höhenflügel von III r und III l liegen also symmetrisch zum verticalen Höhenflügel der Ablesung P, und ihr Winkel wird von letzterem halbirt.

Ist H_r die Ablesung des durch III r bestimmten Höhenflügels, H_l diejenige für Höhenflügel III l, so läfst sich P aus H_r und H_l ermitteln, falls O ein festes Object ist. Die Theilung des Höhenkreises ist nun stets so eingerichtet, dafs, wenn der Höhenflügel f aus Ablesung H_l mit wachsenden Ablesungen nach H_r gedreht und dabei durch Ablesung P geführt wird, dafs alsdann die Ablesung 360, welche gleichzeitig die Ablesung 0 ist, passirt wird. Werden also die auf 0 folgenden Ablesungen um 360° vermehrt, und setzt man $P' = \frac{1}{2}(H_l + 360^0 + H_r)$, so ist $P = P' = \frac{1}{2}(H_r + H_l) + 180^0$ die gesuchte Ablesung, wenn $P' < 360^0$ ist, und $P = P' - 360^0 = \frac{1}{2}(H_r + H_l) - 180^0$, wenn $P' > 360^0$ ist.

Die Fehlertheorie des Universalinstruments.

188. Die principielle Berücksichtigung der Thatsache, dafs der einem Instrumente zu Grunde liegende Plan constructiv nie mit absoluter Genauigkeit ausführbar ist, führt zu der Fehlertheorie. Dieselbe geht davon aus, dafs die Abweichungen vom Plan, die sogenannten Fehler, das Normale sind, sucht die Fehler

auf, bestimmt den Grad der Fälschung, welche das Resultat der Messung dadurch erleidet, und schafft sich auf diese Weise das Mittel, aus den fehlerhaften Resultaten diejenigen abzuleiten, welche das fehlerlose Instrument geliefert haben würde.

Die Fehlertheorie jedes Instrumentes ist deshalb von hoher praktischer Bedeutung; sie hat aber auch etwas vorbildlich Moralisches an sich. Denn setzt sich der Mensch selbst an die Stelle des Instrumentes, so wird aus der Fehlertheorie die Selbsterkenntnifs, und das *γνωϑι σεαυτον* des griechischen Weisen erscheint in diesem Zusammenhang als eine Moralvorschrift dafür, dafs der Mensch sein Verhalten, durch Erkenntnifs seiner Fehler, so einrichten sollte, als hätte er keine Fehler.

189. Das fehlerlose und fehlerlos aufgestellte Universalinstrument stellt drei Forderungen, welche im Folgenden als nicht genau erfüllt angesehen werden, nämlich:

a) die Abscissenaxe I. soll vertical stehen;

statt dessen nehmen wir an, dafs die Drehaxe I. unseres U. I. einen Verticalabstand i in Bogensecunden besitzt.

b) Die Ordinatenaxe II. soll normal zur Axe I. liegen, d. h. der Strahl k der Axe II. soll normal zu dem aufwärts gerichteten Strahl I. der Abscissenaxe liegen;

statt dessen nehmen wir an, dafs der Strahl k mit dem Strahl I. den Concavwinkel $90^0 + i'$ bildet, wo i' in Bogensecunden gegeben ist und positiv oder negativ sein kann; im ersten Falle ist $90^0 + i'$ stumpf, im zweiten spitz.

c) Die Collimationslinie f des Fernrohrs soll normal zur Ordinatenaxe II. liegen;

statt dessen nehmen wir an, dafs der Strahl k der Ordinatenaxe mit dem Collimationsstrahl f den Concavwinkel $90^0 + c$ bildet, wo c in Bogensecunden gegeben ist und positiv oder negativ sein kann.

Der Fehler i heifst der *Aufstellungsfehler*; derselbe hat mit der Construction des Instrumentes nichts zu thun, nur mit dessen Aufstellung.

Der Fehler i' heifst der *Axenfehler*.

Der Fehler c heifst der *Collimationsfehler*.

190. Es wird stets angenommen, dafs die Fehlerwinkel klein sind.

Ist x der Werth eines der drei Fehlerwinkel im *Bogenmafs*, so sollen die aus den Reihen für Sinus und Cosinus sich ergebenden Annäherungen erlaubt sein:

$$\sin x = x \qquad \cos x = 1.$$

Ist x'' der Werth des Winkels x für die Einheit der Bogensecunden, so ist:

$$\sin x'' = x'' \sin 1''.$$

Der Collimationsfehler c bewirkt, dafs die beiden Collimationsflügel R und L, welche bei jeder Lage des k-Strahles von dem centrischen Collimationsstrahl III. beschrieben werden, übergehen in einen Halbkegel, dessen Spitze im Mittelpunkt J des Instrumentes liegt und dessen Axe der k-Strahl ist; von diesem Strahl hat jede Kegelseite, also III. in jeder Lage, den Abstand $90^0 + c$.

Desgleichen bewirkt der Axenfehler i', dafs der Strahl k bei der Drehung um I. nicht länger die durch J gelegte Normalebene von I. beschreibt, sondern einen Halbkegel, dessen Spitze in J liegt und dessen Axe der aufwärts gerichtete Strahl I. ist; von diesem Strahl hat der Strahl k in jeder Lage den Abstand $90^0 - i'$.

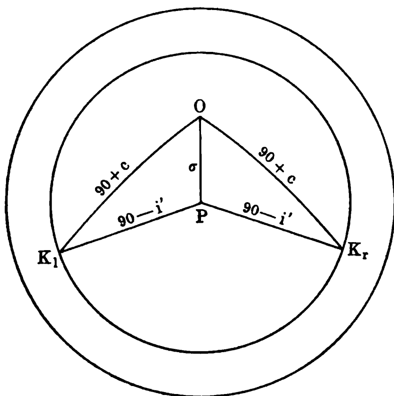
Der Aufstellungsfehler i bewirkt, dafs Strahl I. der Abscissenaxe und der Verticalstrahl von J nicht länger zusammenfallen, sondern den kleinen Winkel i bilden; die Folge ist, dafs die Normalebene von I. im Punkte J nicht länger eine horizontale Ebene ist, sondern die Neigung i gegen die Horizontebene von J besitzt.

191. Wir wollen um J als Mittelpunkt eine Kugel von beliebigem Radius legen und die Punkte und Kreise ins Auge fassen, in denen die von uns betrachteten Strahlen und Ebenen die Kugel schneiden. Den Ordinatenflügel k und den Höhenflügel f denken wir uns in eine beliebige, aber bestimmte Lage gebracht, dann coincidirt Strahl III. mit einem beliebigen Strahl s des Büschels J; diese Lage erfordert, dafs der Collimationsstrahl f des Fernrohrs parallel dem Strahl s liegt. Alsdann liefert der Azimutalkreis eine bestimmte Ablesung A und der Höhenkreis eine bestimmte Ablesung H.

Die Coincidenz kann aber, wie bei dem fehlerlosen Instrument, auf doppelte Weise zu Stande kommen; dies wird durch Fig. 69 zum Ausdruck gebracht.

Für die Figur bedeutet die Ebene der Zeichnung die durch den Mittelpunkt J des Instrumentes und der Kugel gelegte Normalebene der Abscissenaxe I. Der äufsere Kreis ist der Schnittkreis der Normalebene mit der Kugel, also ein Hauptkreis; über der Ebene des Papiers wölbt sich die Halbkugel, deren Scheitel P der Schnittpunkt des Strahles I. mit der Kugel ist. P ist also der Pol des äufseren Kreises.

Fig. 69.



Der Schnittpunkt Z des von J ausgehenden Verticalstrahls ist zunächst nicht angegeben; derselbe würde nahe bei P im Bogenabstand i (Aufstellungsfehler) liegen.

Der Schnittpunkt des Strahles s, mit welchem III. bei K. R. und K. L. coincidirt, sei O.

Der Halbkegel, welchen Strahl k (Axe II.) bei der Drehung um I. beschreibt, schneidet die Kugel in einem Nebenkreise k, dessen Punkte von P den sphärischen Abstand $90^0 - i'$ besitzen. Auf dem Nebenkreise k, welcher der Polare von P parallel ist, liegen die Schnittpunkte K, welche Strahl k bei der Drehung um I. liefert. K_r sei der Schnittpunkt von k, wenn Strahl III. bei K. R. mit Strahl s coincidirt, und K_l das Analoge für K. L.

Da Strahl III. in jeder Lage den Winkelabstand $90^0 + c$ von Strahl k hat, und da III. durch den Punkt O geht, so ist:

$$\widehat{K_r O} = \widehat{K_l O} = 90^0 + c.$$

Ist σ der Winkelabstand des Strahles s von Strahl I., so ist auch für den zugeordneten Bogen

$$\widehat{PO} = \sigma.$$

192. Die beiden Lagen des Fernrohrs für die Coincidenz des Strahles III. mit dem Strahle s des J-Büschels liefern also

zwei symmetrische sphärische Dreiecke OPK_r und OPK_l. Der $\angle P$ hat in jedem Dreieck denselben Werth und bedeutet den Abstand des durch Strahl s gelegten Ordinatenflügels von dem durch Strahl k gelegten Ordinatenflügel, sowohl für Lage K. R. wie K. L. In der einen Lage soll k mit k_r, in der anderen mit k_l bezeichnet werden; die zugehörigen Schnittpunkte mit der Kugel sind dann K_r und K_l. Durch Anwendung des Cosinussatzes der sphärischen Trigonometrie auf die Seite $\widehat{OK_r}$ oder $\widehat{OK_l}$ erhält man zur Bestimmung des $\angle P$ die Gleichung:

$$\cos(90^0 + c) = \cos(90^0 - i') \cos\sigma + \sin(90^0 - i') \sin\sigma \cos P,$$

d. h.

$$-\sin c = \sin i' \cos\sigma + \cos i' \sin\sigma \sin(90^0 - P)$$

und unter Einführung der erlaubten Näherungswerthe:

$$-c = i' \cos\sigma + \sin(90^0 - P) \sin\sigma.$$

$\sin(90^0 - P)$ ist also von der Ordnung der $\sin c$ und $\sin i$.

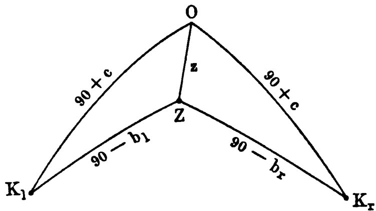
Man darf deshalb in der letzten Gleichung setzen $(90^0 - P)$ an Stelle von $\sin(90^0 - P)$ und erhält:

$$P = 90^0 + c \operatorname{cosec}\sigma + i' \operatorname{ctg}\sigma.$$

Dies ist der gesuchte Abstand des Ordinatenflügels s von den beiden Ordinatenflügeln k_r und k_l.

193. Da der Strahl I. nicht genau mit dem Verticalstrahl zusammenfällt, so schneidet letzterer die Halbkugel in einem Punkte Z, welcher in einem kleinen Abstande i von P liegt. Z bestimmt sowohl mit $\widehat{OK_r}$ wie mit $\widehat{OK_l}$ ein sphärisches Dreieck, für welches die von Z ausgehenden Seiten Zenitdistanzen werden. Wir setzen $\widehat{ZO} = z$, $\widehat{ZK_r} = 90^0 - b_r$, $\widehat{ZK_l} = 90^0 - b_l$; alsdann bedeutet (Nr. 179.) b_r die algebraische Neigung von k in Lage k_r gegen den Horizont von J, und b_l das Analoge für k in Lage k_l.

Fig. 70.



Bezeichnet Z_r den Werth von $\angle Z$ des Dreiecks ZOK_r, und Z_l den Werth von $\angle Z$ des Dreiecks ZOK_l, so entstehen richtige neue Gleichungen, wenn in der bereits abgeleiteten Gleichung:

$$P = 90^0 + c \operatorname{cosec}\sigma + i' \operatorname{ctg}\sigma$$

einmal gesetzt wird Z_r statt P, b_r statt i', z statt σ; das andere Mal Z_l statt P, b_l statt i', z statt σ.

Es wird also:

$$Z_r = 90^0 + c \; cosec \, z + b_r \; ctg \, z$$
$$Z_l = 90^0 + c \; cosec \, z + b_l \; ctg \, z.$$

Dies sind die Abstände des Verticalflügels s von den beiden durch k_r und k_l gelegten Verticalflügeln.

Ist also a das Azimut von Strahl s, a_r das Azimut des Verticalflügels k, wenn Strahl s für Lage K. R. eingestellt ist, und a_l das Analogon, wenn Strahl s für Lage K. L. eingestellt ist, so ist

$$a = (a_r - Z_r)^0_{360} = (a_r - 90^0 - c \; cosec \, z - b_r \; ctg \, z)^0_{360}$$
$$a = (a_l + Z_l)^0_{360} = (a_l + 90^0 + c \; cosec \, z + b_l \; ctg \, z)^0_{360}$$

das Azimut von Strahl s, und es kommt nur darauf an, die Azimute a_r und a_l aus den Ablesungen des Azimutalkreises abzuleiten. Auch mufs gezeigt werden, wie man z und die kleinen Werthe b_r und b_l in den Ausdrücken für Z_r und Z_l bestimmt.

194. In starker Uebertreibung des kleinen Abstandes $i = \widehat{PZ}$ bedeute wiederum Z den Kugelpunkt des Verticalstrahls, P den Kugelpunkt des aufwärts gerichteten Strahles I. und K, K_0 die durch zwei verschiedene Lagen von k gegebenen Punkte. K liegt beliebig auf dem Kreise vom sphärischen Radius $90^0 - i'$, während K_0 und P auf *demselben Verticalhalbkreise* liegen sollen.

Fig. 71.

Es bedeute Z den Werth des sphärischen Winkels KZK_0 und P den des sphärischen Winkels KPK_0; P' sei der Winkel ZPK, dann ist $P + P' = 180^0$.

Die Fundamentalformeln I. und III. (Nr. 144.) der sphärischen Trigonometrie liefern:

$$sin\,(90^0 - b) \; sin \, Z = sin\,(90^0 - i') \; sin \, P'$$
$$sin\,(90^0 - b) \; cos \, Z = cos\,(90^0 - i') \; sin \, i - sin\,(90^0 - i') \; cos \, i \; cos \, P'.$$

Oder:

$$cos \, b \; sin \, Z = cos \, i' \; sin \, P'$$
$$cos \, b \; cos \, Z = sin \, i' \; sin \, i - cos \, i' \; cos \, i \; cos \, P'.$$

Da $\cos b$, $\cos i'$, $\cos i$ durch 1 ersetzt werden dürfen und $\sin i' \sin i = i' \sin 1'' \, i \sin 1''$ vernachlässigt werden darf, so folgt:

$$\sin Z = \sin P' \ldots, \qquad \cos Z = -\cos P' \ldots;$$

es ist ferner:

$$\sin P = \sin P', \qquad \cos P = -\cos P',$$

weil $P + P' = 180^0$, also:

$$\sin Z = \sin P \ldots, \qquad \cos Z = \cos P \ldots,$$

d. h.:

$$\angle Z = \angle P \ldots$$

Dies gilt für jede beliebige Lage des Axenstrahls k; ist demnach k' eine zweite Lage von k und K' ihr Kugelpunkt, so wird für analoge Bezeichnungen:

$$\angle Z' = \angle P' \ldots,$$

d. h.: $\angle K'ZK_0 = \angle K'PK_0$

und auch: $\angle KZK_0 = \angle K'PK_0$.

Differenz: $\angle K'ZK = \angle K'PK$.

195. Sind A_0, A, A' die Ablesungen des Azimutalkreises, wenn Strahl k durch K_0, K, K' geht, so ist:

$$A' - A = \angle K'PK, \text{ also auch } A' - A = K'ZK,$$

d. h., die *Differenz zweier Ablesungen des Azimutalkreises, denen die Lagen k und k' des Strahles k der Axe II. entsprechen, liefert den Abstand der durch k und k' bestimmten Verticalflügel.*

Ist M die Ablesung, wenn k im Verticalflügel des Südpunktes (in Bezug auf den Horizont von J) liegt, A_r, bezw. A_l die Ablesung für eine beliebige Lage von k, je nachdem es sich um eine Coincidenz von III. mit Strahl s bei K. R. oder bei K. L. handelt, so ist:

$a_r = (A_r - M)^0_{360}$ das *Azimut des Verticalflügels bei Ablesung* A_r, und $a_l = (A_l - M)^0_{360}$ *das Azimut des Verticalflügels von k bei Ablesung A_l.*

Wird daher der Strahl s des Büschels J bei K. R. und K. L. „eingestellt", d. h. wird der centrische Collimationsstrahl *III*, welcher stets parallel dem Collimationsstrahl f des Fernrohres ist, bei K. R. und K. L. zur Coincidenz mit s gebracht, so läfst sich das Azimut a des Strahles s in doppelter Weise durch die Ablesungen des U. I. darstellen; denn es ergibt sich gemäfs Nr. 193:

K. R. $a = (A_r - M - 90^0 - c \; cosec \; z - b_r \; ctg \; z)^0_{360}$

und

K. L. $a = (A_l - M + 90^0 + c \; cosec \; z + b_l \; ctg \; z)^0_{360}$.

Die in diesen Ausdrücken auftretende Zenitdistanz z des Strahles s wird mittels des Höhenkreises bestimmt; wie dies geschieht, wenn das U. I. fehlerfrei ist und Axe I. die Verticale von J darstellt, ist bereits gezeigt worden (Nr. 180.). Die endgiltige, der Praxis entsprechende Bestimmung wird bei der Betrachtung des Höhenniveaus (Nr. 202 ff.) gegeben werden.

Bestimmung des Axenfehlers i' und des Aufstellungsfehlers i.

196. Wendet man auf das Dreieck KPZ (Fig. 72), dessen drei Seiten durch die Fehler des U. I. geliefert werden, und wo $\widehat{ZP} = i$ der Aufstellungsfehler ist, den Cosinussatz an, so erhält man:

$$cos(90^0 - b) = cos\, i \; cos(90^0 - i') + sin\, i \; sin(90^0 - i') \; cos\, P',$$

wo $P' = 180^0 - (A - A_0)$ (Nr. 195., Anfang), also:

$$sin\, b = sin\, i' - sin\, i \; cos\, i' \; cos(A - A_0)$$

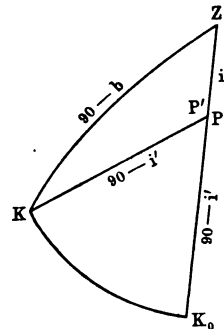
$$b = i' - i \; cos(A - A_0).$$

Bezeichnet man den nach rechts genommenen Abstand des durch k bestimmten Verticals von dem durch P gelegten Vertical mit α, so ist $\alpha = (A - A_0)^0_{360}$. Die Gleichung

$$b = i' - i \; cos\, \alpha$$

zeigt also die Abhängigkeit der algebraischen Neigung b von i' und i für jede Lage von k, welche durch α gegeben ist.

Fig. 72.



Wird k um 120^0, bezw. 240^0 gedreht, und bezeichnet b_1, bezw. b_2 die algebraische Neigung von k in diesen Lagen, so ist gleichzeitig:

$$b = i' - i \; cos\, \alpha$$

$$b_1 = i' - i \; cos(\alpha + 120^0)$$

$$b_2 = i' - i \; cos(\alpha + 240^0).$$

Wird auf die beiden letzten Gleichungen die allgemein giltige Relation angewandt $cos(\alpha + x) = cos\, \alpha \; cos\, x - sin\, \alpha \; sin\, x$, so treten darin die Factoren $sin\, 120^0$, $cos\, 120^0$, $sin\, 240^0$, $cos\, 240^0$ auf, deren Werthe leicht anzugeben sind.

Denn es ist $cos\ 60^0 = \frac{1}{2}$, wie sich ergibt, wenn man von einer Ecke eines gleichseitigen Dreiecks ein Loth auf die gegenüberliegende Seite fällt; man erhält hieraus:

$$sin\ 60^0 = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Also ist:

$$cos\ 120^0 = cos\,(180^0 - 60^0) = -cos\ 60^0 = -\frac{1}{2},$$

$$sin\ 120^0 = sin\ (180^0 - 60^0) = sin\ 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$cos\ 240^0 = cos\,(180^0 + 60^0) = -cos\ 60^0 = -\frac{1}{2},$$

$$sin\ 240^0 = sin\,(180^0 + 60^0) = -sin\ 60^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Hierdurch lassen sich die b, b_1, b_2 darstellen in der Form:

1. $b = i' - i\ cos\,\alpha$
2. $b_1 = i' + \frac{1}{2}\,i\ cos\,\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{3}\ i\ sin\,\alpha$
3. $b_2 = i' + \frac{1}{2}\,i\ cos\,\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3}\ i\ sin\,\alpha.$

Die Bildung von $\frac{1}{3}(b + b_1 + b_2)$ liefert:

$$i' = \frac{1}{3}(b + b_1 + b_2).$$

Die Bildung von $b_1 - b_2$ liefert:

$$\sqrt{3}\ i\ sin\,\alpha = b_1 - b_2.$$

Die Bildung von $\frac{1}{3}(b_1 + b_2 - 2\,b)$ liefert:

$$i\ cos\,\alpha = \frac{1}{3}(b_1 + b_2 - 2\,b).$$

Während i' durch

$$i' = \frac{1}{3}(b + b_1 + b_2)$$

bereits bestimmt ist, folgen i und α aus

$$i\ sin\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}(b_1 - b_2)$$

$$i\ cos\,\alpha = \frac{1}{3}[(b_1 - b) + (b_2 - b)].$$

i ist stets positiv; der Quadrant von α wird also durch die Vorzeichen der rechten Seiten bestimmt. Durch Division folgt:

$$tg\,\alpha = \sqrt{3}\,\frac{b_1 - b_2}{(b_1 - b) + (b_2 - b)};\quad A_0 = (A - \alpha)^0_{360}.$$

Durch Quadriren und Addiren von $i\,sin\,\alpha$ und $i\,cos\,\alpha$ erhält man:

$$i = \frac{2}{3}\sqrt{[(b^2 + b_1^2 + b_2^2) - (b\,b_1 + b_1 b_2 + b_2 b)]}.$$

Die Ausdrücke für i und i' sind, wie nicht anders sein kann, symmetrisch in Bezug auf b, b_1, b_2, d. h. sie bleiben unverändert, wenn irgend zwei der b mit einander vertauscht werden.

Röhrenlibellen.

197. Es soll nun zunächst gezeigt werden, wie man den Werth b, welcher jeder Lage von k zugeordnet ist, findet.

Das Mittel hierzu bieten die Röhrenlibellen. Dieselben haben den Zweck, den Winkelabstand eines *nahezu vertical* gerichteten Strahles s und des *wahren Zenitstrahles* z zu ermitteln, wenn s und z Strahlen desselben Strahlenbüschels sind.

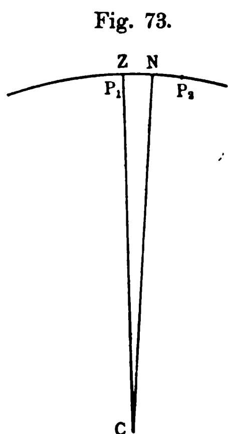
Eine solche Libelle, auch Niveau genannt, besteht aus einer kurzen Glasröhre, welche in einer Messingfassung ruht, und deren Innenwand schwach tonnenförmig ausgeschliffen ist. Die Röhre ist mit einer Flüssigkeit gefüllt derart, dafs Raum für eine längliche Luftblase bleibt, welche bei passender Stellung des Niveaus frei spielt. Man unterscheidet an ihr die Blasenenden und die Blasenmitte, welche stets den höchsten Ort des Niveauinneren aufsucht.

Die Libellenröhre ist der Träger eines Kreisbogens von grofsem Radius; seine Länge kann 50, selbst 400 Meter übersteigen. Der Kreis, welchem der *Niveaubogen* angehört, bestimmt durch seine Ebene die *Libellen- oder Niveauebene*, durch seinen Mittelpunkt das *Libellencentrum* oder den *Mittelpunkt des Niveaus.* Unter der *Niveauaxe* verstehen wir die durch das Libellencentrum gelegte *Normale der Libellenebene.* Der Niveaubogen ist in eine Anzahl gleicher Bogenstücke, Niveaupartes, getheilt; ihr in Bogensecunden ausgedrückter Werth heifst der *Werth einer pars.* Derselbe wird im Folgenden stets mit ε'' bezeichnet. Unter λ soll die *Anzahl der partes* verstanden werden, in welche der Niveaubogen getheilt ist; man bezeichnet diese Anzahl als die *Länge des Niveaus.*

Der getheilte Niveaubogen stellt also einen Bogen von $\lambda\,\varepsilon$ Bogensecunden dar. Ist z. B. $\lambda = 25$, $\varepsilon'' = 6''$, so hat der Bogen die Länge von $150'' = 2'\,30''$. Die Mitte des getheilten Bogens heifst die *Niveaumitte*; ihre *Niveauablesung* ist also $\frac{\lambda}{2}$; denn es wird hier stets angenommen, dafs die Endstriche der Theilung mit 0 und λ bezeichnet sind. Es sind auch Libellen in Gebrauch, für welche die Werthe der Theilstriche von der Mitte 0 nach beiden Seiten wachsen.

198. Ist die Libellenebene eine Verticalebene, und bildet der Radius der Niveaumitte nur einen kleinen Winkel mit dem Zenitstrahl des Libellencentrums, so wird die Blase spielen, und der Punkt P_1 (Fig. 73), in welchem der radiale Zenitstrahl CZ den Niveaubogen trifft, wird dem Auge durch die Blasenmitte kenntlich sein und eine bestimmte Niveauablesung liefern.

Fig. 73.



Ist der Niveaubogen um einen Radius CN *drehbar*, welcher gleichfalls nur geringen Abstand von dem radialen Zenitstrahl hat, so wird die Blasenmitte, vor und nach einer 180°-Drehung, mit zwei Punkten P_1 und P_2 coincidiren, welche *von N gleich weit entfernt sind.*

Bezeichnen also α_1 und α_2 die Ablesungen vor und nach der Drehung, und ist p die Ablesung des Punktes N, so ist:

$$p = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Der halbe Bogen $\widehat{P_1 P_2}$ liefert den Abstand ν des Drehradius vom Zenitstrahl, und es ist für die Einheit der Niveaupars:

$$\nu = (\alpha_1 \sim p) = (\alpha_2 \sim p) = \frac{1}{2}(\alpha_1 \sim \alpha_2) = \frac{1}{2}(\alpha_2 \sim \alpha_1);$$

in Bogensecunden ist $\nu\,\varepsilon''$ der Werth.

Das Reiterniveau.

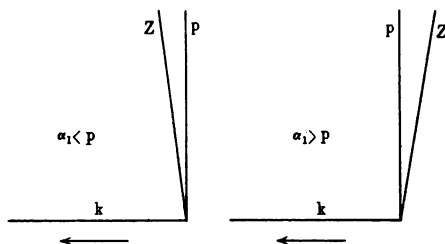
199. Unter Reiterniveau versteht man ein Niveau, welches so gefafst ist, dafs es sich auf einer cylindrischen Axe aufsetzen läfst; für das Reiterniveau des U. I. ist dies die Axe, in welcher die Drehaxe II. liegt.

Die 180°-Drehung wird hier durch *Umsetzen* bewirkt. Die Drehaxe liegt also normal zur Aufsatzaxe II. Da nun der Zenitradius normal liegt zum Horizont, so ist $\nu\,\varepsilon''$ die *Neigung der Ordinatenaxe* II. *gegen den Horizont.*

Der Werth $\nu\,\varepsilon''$ ist der numerische Werth des b unserer Fehlertheorie; b ist eine positive oder negative Zahl, je nachdem Strahl k der Axe II. *steigt* oder *fällt.* b ist also entweder gleich $\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)\,\varepsilon''$ oder gleich $\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)\,\varepsilon''$. Man findet die algebraische Zahl b jederzeit eindeutig durch folgende Ueberlegung.

Die beiden Lagen des Niveaus vor und nach der Drehung unterscheiden sich dadurch, dafs die Richtung der wachsenden Theilung das eine Mal mit der Richtung des Strahles k der Aufsatzaxe II. *übereinstimmt*, das andere Mal der letzteren *entgegengesetzt* ist. Nennen wir die erste Lage: Lage 1 und α_1 die Blasenablesung. Hierbei können (Fig. 74) zwei Fälle eintreten: $\alpha_1 > p$, $\alpha_1 < p$. Ist $\alpha_1 > p$, so bildet Strahl k einen *spitzen Winkel* mit dem Zenitstrahl, *steigt also an*, und es ist b positiv und $b = (\alpha_1 - p)\,\varepsilon'' = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)\,\varepsilon''$. Ist $\alpha_1 < p$, so bildet Strahl k einen *stumpfen Winkel* mit dem Zenitstrahl, *fällt also*, und es ist b negativ und $b = -(p - \alpha_1)\,\varepsilon''$, d. h. $b = (\alpha_1 - p)\,\varepsilon'' = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)\,\varepsilon''$.

Fig. 74.



Es wird also in beiden Fällen derselbe Ausdruck für b erhalten. Da b die *algebraische Neigung des Strahles* k ist, so haben wir folgende Regel:

Sind α_1 *und* α_2 *die beiden Ablesungen des Reiterniveaus vor und nach dem Umsetzen, und bezieht sich* α_1 *auf diejenige Lage des Niveaus, für welche die Ablesungen in der Richtung des Strahles* k *wachsen, so ist* $\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)\,\varepsilon''$ *die algebraische Neigung von* k.

200. Man mufs demnach beim Anschreiben der Ablesungen irgend wie kenntlich machen, welche Ablesung α_1 und welche α_2 ist.

Am besten ist es, das Reiterniveau ein für alle Mal *zuerst in Lage 1* abzulesen; dann braucht man nichts weiter zu bemerken und erhält stets das richtige b in Bogensecunden, wenn man die zweite Ablesung von der ersten abzieht und mit $\frac{\varepsilon}{2}$ multiplicirt.

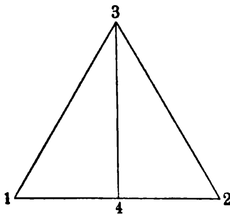
$\frac{\lambda}{2}$ ist die Ablesung der Niveaumitte. Ist $p = \frac{\lambda}{2}$, so heifst das Niveau *berichtigt.* Ist α eine Blasenablesung, so heifst $\alpha - \frac{\lambda}{2}$ der *Ausschlag der Blase*; sein numerischer Werth ist für ein berichtigtes Niveau gleich der Neigung der Aufsatzaxe gegen den Horizont. Die Fassung des Niveaus ist mit Correctionsschrauben versehen, mittels deren dasselbe berichtigt werden kann.

Aufstellung des Universal-Instrumentes mittels des Reiterniveaus.

201. Mittels des berichtigten Reiterniveaus kann man nun den Aufstellungsfehler i des Instrumentes möglichst klein machen, d. h. Axe I. möglichst genau vertical stellen. Dies geschieht in folgender Weise.

Das Instrument ruht auf drei Fufsschrauben, welche nach unten zu in Spitzen 1., 2., 3. auslaufen und ein gleichseitiges Dreieck bilden. Die Drehung einer der drei Schrauben, z. B. 3., bewirkt eine kleine Drehung des Instrumentes um eine Axe $\overline{1.\ 2.}$, welche durch die Spitzen 1. und 2. der beiden anderen Schrauben geht; gleich grofse entgegengesetzte Drehungen zweier Schrauben, z. B. 1. und 2., bewirken, dafs sich das U. I. um eine Axe $\overline{3.\ 4.}$ dreht, welche durch die dritte Schraubenspitze 3. geht und normal liegt zu der Basis $\overline{1.\ 2.}$ der beiden anderen Spitzen. Es wird angenommen, dafs die Ebene der Schraubenspitzen 1., 2., 3. *nahezu horizontal* sei. Dreht man die Ordinatenaxe II. so, dafs sie dem von 3. auf

Fig. 75.



$\overline{1.\ 2.}$ gefällten Lothe parallel wird, und darauf Schraube 3. so, daſs die Blase einspielt, so liegt II. horizontal, also ist ihre Normalebene, in welcher I. liegt, eine *Verticalebene.* Dreht man nun II. parallel der Basis $\overline{1.\ 2.}$ und beide Schrauben gleichviel im entgegengesetzten Sinne, so dreht sich I., bleibt aber in derselben Verticalebene; bringt man die Blase zum Einspielen, so liegt II. wiederum horizontal, und I. in einer *zweiten Verticalebene.* Axe I. liegt also *in der Schnittgeraden zweier Verticalebenen, d. h. vertical.*

Man prüft nun, ob dies wirklich der Fall ist; wenn I. genau vertical steht, so muſs die Blase des Reiterniveaus in *jeder Lage* von II. an *derselben* Stelle bleiben, weil ihre Neigung gegen den Horizont unverändert bleibt. Im Allgemeinen wird man das angegebene Nivellirverfahren, wegen der unpräcisen Ausführung, einige Male wiederholen müssen.

Die Aufstellung gilt als bewerkstelligt, wenn die Blase in jeder Stellung von II. frei spielt, d. h. mit keinem ihrer Enden anstöſst.

Das Höhenniveau des Universalinstrumentes.

202. Ein zweites Niveau, welches für Beobachtungen mit dem U. I. unentbehrlich ist, heiſst das *Höhenniveau.* Es dient dazu, die Ablesungen des Höhenkreises so zu verbessern, daſs sich daraus die richtigen Zenitdistanzen der eingestellten Objecte ergeben.

Dieses Niveau ist *fest mit dem U. I. verbunden;* seine Ebene liegt parallel der des Höhenkreises; also ist seine *Axe parallel der Ordinatenaxe II.*

Wir hatten den Drehflügel der Axe II., welcher durch den Collimationsstrahl f des Fernrohres und den parallelen centrischen Collimationsstrahl III. geht, als *Höhenflügel* f bezeichnet und wollen jeden Flügel der Niveauaxe einen *Niveauflügel* nennen. Da beide Axen parallel sind, so entspricht *jedem Flügel der einen Schaar ein Parallelflügel der anderen.* Also sind auch der *verticale Höhenflügel und der verticale Niveauflügel einander parallel.*

Das Niveau soll die *Länge* λ haben, d. h. in λ gleiche partes getheilt sein; dadurch wird $\frac{\lambda}{2}$ die Ablesung der Niveaumitte.

Es soll jeder Niveauflügel durch die Niveauablesung des Punktes bezeichnet werden, in welchem dieser Flügel den getheilten Niveaubogen schneidet; alsdann geht Niveauflügel $\frac{\lambda}{2}$ durch die Niveaumitte. Einen Höhenflügel bezeichnen wir wie früher durch die Ablesung H des Höhenkreises, welche sich ergibt, wenn der Höhenflügel f mit dem Höhenflügel H coincidirt.

203. Es gibt einen Höhenflügel N, welcher dem Niveauflügel $\frac{1}{2}\lambda$ parallel ist, und einen Niveauflügel p, welcher dem Höhenflügel P parallel ist. Hier bedeutet P die Ablesung desjenigen Höhenflügels, welcher den aufwärts gerichteten Strahl I. enthält. Die Ablesungen p und N sollen zunächst bestimmt werden. Mittels derselben läfst sich die Ablesung Z des Verticalflügels von II. finden für diejenige Lage der Axe II., bei welcher eine Einstellung gemacht und die Ablesung H des Höhenkreises erhalten ist. Aus Z und H folgt dann der Abstand des Höhenflügels H vom Verticalflügel der Axe II., und dieser darf, wie gezeigt werden soll, in den meisten Fällen als die *Zenitdistanz des eingestellten Objectes* angesehen werden.

204. Die Bestimmung von p erfolgt mittels einer Ablesung α_1 des Höhenniveaus in beliebiger Lage von II., einer 180°-Drehung um Axe I., und mittels der Ablesung α_2, welche durch die neue Lage des Höhenniveaus geliefert wird. Alsdann läfst sich folgendermafsen zeigen, dafs

$$p = \frac{1}{2}(\alpha_1 + a_2)$$

gesetzt werden darf.

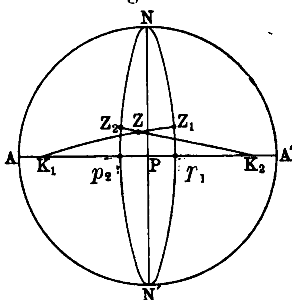
Die Ablesungen des Höhenniveaus bleiben unverändert, wenn dasselbe parallel so verschoben gedacht wird, dafs die Niveauaxe in die Axe II. und der Mittelpunkt C des Niveaus in den Mittelpunkt J des Instrumentes fällt.

Um J werde eine Kugel gelegt, für welche P den Schnittpunkt des Strahles I. bedeute. Die Polare von P soll in der Ebene der Zeichnung liegen.

K_1 bedeute den Punkt, welchen Strahl k der Axe II. vor der Drehung bestimmt. Da auch die parallel sich selbst verschobene Niveauaxe durch K_1 geht, so ist die Polare von K_1 der Schnitt

der Niveauebene mit der Kugel. Es seien NN' die Schnittpunkte der Polaren von P und K_1. Kreis (P, N) liegt normal zu Kreis (P, K_1); AA' seien die Schnittpunkte des letzteren mit der Polare von P.

Fig. 76.



A und K_1 liegen viel näher an einander als die Zeichnung es angibt, denn es ist $\widehat{AK_1}$ gleich dem Axenfehler i'.

Ist Z der Schnittpunkt des Zenitstrahles, so ist $\widehat{PZ}$ gleich dem Aufstellungsfehler i.

Die von K_1 durch Z und P gelegten Kreise schneiden die Polare von K_1 in den Punkten Z_1 und p_1; der Abstand beider Kreise ist also gleich dem Bogen $\widehat{p_1 Z_1}$, d. h. es ist $\widehat{p_1 Z_1}$ der Abstand des verticalen Höhenflügels von dem durch Strahl I. gelegten Höhenflügel. Es sei α_1 die Ablesung des Höhenniveaus.

Nachdem die 180^0-Drehung um P ausgeführt ist, erhält der Schnittpunkt des Strahles k mit der Kugel die Lage K_2, symmetrisch zu K_1 in Bezug auf Kreis NPN'. Die neue Lage des Höhenniveaus ist nun die Polare von K_2. Dieselbe wird von den Kreisen (K_2, Z) und (K_2, P) in den Punkten Z_2 und p_2 geschnitten. Es ist $\widehat{p_2 Z_2}$ der Abstand des verticalen Höhenflügels von dem durch Strahl I. gelegten Höhenflügel. α_2 sei die Ablesung des Höhenniveaus.

Wenn kein Axenfehler i' vorhanden wäre, so würde K_1 mit A, K_2 mit A' zusammenfallen, die Punkte $Z_1 Z_2$ würden auf dem Kreise AZA' liegen, und es würde sein

$$\widehat{p_1 Z_1} = \widehat{p_2 Z_2}.$$

Diese Gleichung dürfen wir aber auch, wegen der Kleinheit des Axenfehlers i', für unseren Fall gelten lassen. Die Bogen $\widehat{p_1 Z_1}$ und $\widehat{p_2 Z_2}$ lassen sich durch die Ablesungen des Höhenniveaus ausdrücken; denn die Punkte p_1 und p_2 haben offenbar dieselbe Ablesung p; folglich wird:

$$\widehat{p_1 Z_1} = (\alpha_1 - p)\,\varepsilon'', \quad \widehat{p_2 Z_2} = (p - \alpha_2)\,\varepsilon'', \text{ falls } \alpha_1 > \alpha_2,$$

und

$$\widehat{p_1 Z_1} = (p - \alpha_1)\,\varepsilon'', \quad \widehat{p_2 Z_2} = (\alpha_2 - p)\,\varepsilon'', \text{ falls } \alpha_2 > \alpha_1.$$

In beiden Fällen ergibt sich wegen $p_1\widehat{Z}_1 = p_2\widehat{Z}_2$ dieselbe Gleichung:

$$\alpha_1 - p = p - \alpha_2,$$

d. h.

$$p = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Die Ablesung P wird durch dieselbe Ueberlegung erhalten wie in Nr. 187., wo der durch Strahl I. gelegte Höhenflügel gleichzeitig den verticalen Höhenflügel bedeutete. Es wird, wenn $H_{r,0}$ und $H_{l,0}$ sich auf Einstellungen *desselben* festen Objectes bei K. R. und K. L. beziehen:

$$P = \frac{1}{2}(H_{r,0} + H_{l,0}) \mp 180^0,$$

je nachdem das Mittel der beiden Ablesungen gröfser oder kleiner als 180° ist.

205. Das Höhenniveau soll *ungleichstimmig* sein, d. h. wenn der *Höhenflügel* durch Drehung um II. eine *wachsende* Ablesung erfährt, so soll der parallele *Niveauflügel* eine *abnehmende* Ablesung erfahren. Es liegt also, weil Höhenflügel P und Niveauflügel p einander parallel sind und Analoges für Höhenflügel N und Niveauflügel $\frac{\lambda}{2}$ statt hat:

Flügel N im Abstand $\left(p \sim \frac{\lambda}{2}\right)\varepsilon''$ vom Flügel P,

d. h. es ist

$$N = \left[P + \left(p - \frac{\lambda}{2}\right)\varepsilon''\right]_{360}^{0}$$

die Ablesung des Höhenkreises, sobald Höhenflügel f dem Niveauflügel $\frac{\lambda}{2}$ parallel gestellt wird. Durch Einsetzen des Ausdruckes für P (Nr. 204.) entsteht:

$$N = \frac{1}{2}(H_{r,0} + H_{l,0}) + \left(p - \frac{\lambda}{2}\right)\varepsilon'' \pm 180^0.$$

Das richtige Zeichen von $\pm 180^0$ ergibt sich daraus, dafs N als Ablesung zwischen 0° und 360° liegt; da die Flügel N und P nur geringen Abstand haben, und P entweder nahe bei 0° oder nahe bei 360° liegt, so gilt dies auch für N. Führen wir abkürzend ein:

$$N_0 = \frac{1}{2}(H_{r,0} + H_{l,0}) + \left(p - \frac{\lambda}{2}\right)\varepsilon'',$$

so wird:

$$N = N_0 \pm 180^0,$$

also liegt N_0 in der Nähe von 180^0.

206. Es werde nun ein zweites Object eingestellt; dasselbe liefere bei K. R. die Ablesung H_r, bei K. L. die Ablesung H_l.

Bezeichnet ω_r den Abstand des Flügels H_r vom Flügel N, und ω_l den Abstand des Flügels H_l vom Flügel N, so ist, da diese Abstände stets positiv sind:

$$\omega_r = (H_r - N)^0_{360}, \quad \omega_l = (N - H_l)^0_{360}.$$

Liegt N nahe bei 0, so ist:

$$\omega_r = H_r - N, \ \omega_l = 360^0 + N - H_l \text{ und } N = N_0 - 180^0,$$

d. h.

$$\omega_r = H_r - N_0 + 180^0, \ \omega_l = 360^0 - (H_l - N_0 + 180^0).$$

Liegt N nahe bei 360^0, so ist:

$$\omega_r = 360^0 + H_r - N, \ \omega_l = N - H_l \text{ und } N = N_0 + 180^0,$$

d. h.

$$\omega_r = H_r - N_0 + 180^0, \quad \omega_l = 360^0 - (H_l - N_0 + 180^0).$$

Beide Fälle liefern also denselben Ausdruck für ω_r, bezw. ω_l. Wird eingeführt

$$\textit{Indexfehler } i = - N_0 + 180^0,$$

so wird:

$$\omega_r = H_r + i, \quad \omega_l = 360^0 - (H_l + i).$$

Der Aufstellungsfehler wurde zwar auch mit i bezeichnet, aber es werden dadurch keine Zweideutigkeiten für die Darstellung entstehen.

Wird sowohl für Einstellung bei K. R. wie bei K. L. unter Höhenflügel Z der Verticalflügel der Axe II. verstanden, so liegt Flügel Z parallel zu dem Niveauflügel der Blasenmitte. Bedeutet z_r, bezw. z_l den Abstand des Höhenflügels H_r, bezw. H_l von dem zugehörigen Verticalflügel Z der Axe II., so wird:

$$z_r = (H_r - Z)^0_{360}, \qquad z_l = (Z - H_l)^0_{360};$$

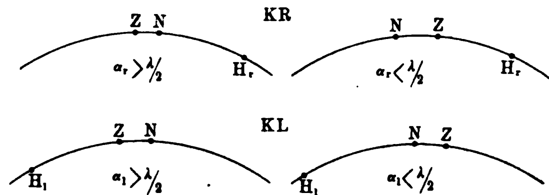
z_r ergibt sich aus ω_r: ist α_r die Niveauablesung bei K. R. (Fig. 77), und ist $\alpha_r - \frac{\lambda}{2}$ positiv, so ist der Abstand des Flügels Z vom Flügel H_r um $\left(\alpha_r - \frac{\lambda}{2}\right)\varepsilon''$ gröfser als der des Flügels N vom

Flügel H_r; ist dagegen $\alpha_r - \frac{\lambda}{2}$ negativ, so ist der Z-Abstand um $\left(\frac{\lambda}{2} - \alpha_r\right)\varepsilon''$ kleiner als der N-Abstand, so daſs in beiden Fällen erhalten wird:

$$z_r = \omega_r + \left(\alpha_r - \frac{\lambda}{2}\right)\varepsilon''.$$

Wird die analoge Betrachtung bei K. L. angestellt (Fig. 78), wo α_l

Fig. 77. Fig. 78.



die Niveauablesung ist, so wird für ein positives $\alpha_l - \frac{\lambda}{2}$ der Z-Abstand des Flügels H_l um $\left(\alpha_l - \frac{\lambda}{2}\right)\varepsilon''$ kleiner als der N-Abstand, und für ein negatives $\alpha_l - \frac{\lambda}{2}$ um $\left(\frac{\lambda}{2} - \alpha_l\right)\varepsilon''$ gröſser. Folglich ergibt sich in beiden Fällen:

$$z_l = \omega_l - \left(\alpha_l - \frac{\lambda}{2}\right)\varepsilon''.$$

Werden die *Niveau-Ausschläge*, d. h.

$$n_r = \alpha_r - \frac{\lambda}{2}, \qquad n_l = \alpha_l - \frac{\lambda}{2}$$

eingeführt, und auſserdem

$$\omega_r = H_r + i, \qquad \omega_l = 360^0 - (H_l + i),$$

so entsteht:

$$z_r = H_r + n_r\,\varepsilon'' + i; \qquad z_l = 360^0 - (H_l + n_l\,\varepsilon'' + i).$$

Man nennt

$$H_r + n_r\,\varepsilon'' = H'_r; \qquad H_l + n_l\,\varepsilon'' = H'_l$$

die *für das Niveau verbesserten Ablesungen* und erhält:

$$z_r = H'_r + i, \qquad z_l = 360^0 - (H'_l + i).$$

Damit ist gezeigt, wie der Raumwinkel z_r, bezw. z_l, d. h. der Abstand des Höhenflügels H_r, bezw. H_l vom verticalen Höhenflügel der Axe II. mittels des Höhenkreises und des Höhenniveaus bestimmt werden.

207. Für die *Bestimmung des Indexfehlers* i genügt es, dasselbe feste Object bei K. R. und K. L. einzustellen und vor und nach jeder Ablesung des Höhenkreises das Niveau abzulesen; die 180°-Drehung, durch welche p bestimmt werden soll, wird dabei zwar nicht genau vorgenommen, aber der begangene Fehler kann vernachlässigt werden. Sind also $H_{r,0}$, $\alpha_{r,0}$ die Ablesungen bei K. R., $H_{l,0}$ und $\alpha_{l,0}$ diejenigen bei K. L., so wird:

$$p = \frac{1}{2}(\alpha_{r,0} + \alpha_{l,0}),$$

$$N_0 = \frac{1}{2}(H_{r,0} + H_{l,0}) + \frac{1}{2}\left[\left(\alpha_{r,0} - \frac{\lambda}{2}\right) + \left(\alpha_{l,0} - \frac{\lambda}{2}\right)\right]\varepsilon'',$$

$$N_0 = \frac{1}{2}(H_{r,0} + H_{l,0}) + \frac{1}{2}(n_{r,0} + n_{l,0})\,\varepsilon'',$$

$$N_0 = \frac{1}{2}[(H_{r,0} + n_{r,0}\,\varepsilon'') + (H_{l,0} + n_{l,0}\,\varepsilon'')].$$

N_0 ist also das Mittel der verbesserten Ablesungen in beiden Lagen und der negative Werth dieses Mittels + 180° ist der Indexfehler.

208. Das Höhenniveau und die beiden Mikroskope, deren jedes die Ablesung des Höhenkreises mittels eines, in ihm angebrachten Indexfadens bewirkt, sind an demselben Träger befestigt. Dem letzteren kann man kleine Drehungen mit Hilfe einer Feinstellschraube geben. Dadurch verändert sich gleichzeitig die Lage des Indexfadens gegen die Kreistheilung und auch die Lage der Blasenmitte gegen den getheilten Niveaubogen. Die Verschiebungen sind gleich grofs, aber ihre Zeichen sind entgegengesetzt, weil das Niveau ungleichstimmig angenommen ist.

Sind (δH) und $(\delta\alpha)$ die numerischen Beträge der Aenderungen δH und $\delta\alpha$ für Kreis und Niveau, so ist $(\delta H) = (\delta\alpha)\,\varepsilon''$.

War *vor* der kleinen Drehung $H + n\,\varepsilon''$ die verbesserte Ablesung, so ist sie *nach* der Drehung:

$$H \pm (\delta H) + n\,\varepsilon'' \mp (\delta\alpha)\,\varepsilon'' = H + n\,\varepsilon'' \pm (\delta H) \mp (\delta\alpha)\,\varepsilon'';$$

da $\pm(\delta H) \mp (\delta\alpha)\,\varepsilon'' = 0$, so bleibt die *verbesserte Ablesung unverändert, wenn die Feinstellschraube gedreht wird*, d. h. constant gleich $H + n\,\varepsilon''$.

Ebenso bleibt die *Ablesung des „Mittelflügels"*, welcher dem Niveauflügel $\frac{\lambda}{2}$ parallel ist, *constant gleich* N. Denn durch die

Drehung wird die Lage des Mittelflügels verändert und seine Ablesung um ebenso viel erhöht, bezw. erniedrigt, als sie in Folge der Indexdrehung erniedrigt, bezw. erhöht wird. Es bleiben also N, folglich auch N_0 und der Indexfehler i constant; und $(H + n\varepsilon'') + i$ ist stets die Summe einer verbesserten Ablesung und des Indexfehlers. Man darf also *vor* jeder Ablesung die Blase einstellen, falls sie nicht frei spielen oder einen zu grofsen Ausschlag haben sollte.

209. Ein geübter Beobachter notirt das Niveau, *vor* und *nach* jeder Höhenablesung, gewissermafsen instinctiv; nicht so der Anfänger. Durch Selbstdisciplin wird er es dahin bringen, diese nothwendige Ablesung und Notirung nie zu vergessen. Es werden dabei stets nur die Ablesungen der beiden *Blasenenden* aufgeschrieben; erst später, bei der Berechnung, wird ihre Summe gebildet und die Niveaulänge λ davon abgezogen. Die Hälfte dieser Differenz (mit dem richtigen Zeichen) mal ε'' ist der Ausschlag, welcher — zur Ablesung des Höhenkreises addirt — die verbesserte Ablesung liefert.

210. Der räumliche Winkel z_r, bezw. z_l, kann in den meisten Fällen als die Zenitdistanz ζ des eingestellten Objectes genommen werden. Streng richtig aber wäre das nur, wenn die Normalebene der Axe II. im Fernrohrpunkte F (Nr. 176., Fig. 65) den Verticalflügel im Zenitstrahl v schnitte, den Flügel H_r, bezw. H_l in dem Collimationsstrahl f; dann wäre der Winkel der Strahlen v, f der dem Raumwinkel z_r, bezw. z_l zugeordnete ebene Winkel. Dazu gehört, dafs der Zenitstrahl v normal zu II. liegt, d. h. dafs II. horizontal, also frei von Neigung ist; ferner, dafs f normal zu II. liegt; dazu gehört, dafs kein Collimationsfehler c vorhanden ist, durch welchen f den Winkel $90^0 + c$, statt 90^0, mit dem k-Strahl von II. bildet.

Herleitung der Zenitdistanz ζ des eingestellten Objectes aus dem Werthe des Raumwinkels z.

211. Die sphärische Betrachtung führt auf einfache Weise zu der Beziehung zwischen der Zenitdistanz ζ des Collimationsstrahles f und dem Raumwinkel z, welchen wir (Nr. 206., Ende) mit z_r, bezw. z_l bezeichnet hatten.

Auf der um den Mittelpunkt J des U. I. gelegten Kugel liefert der Verticalstrahl den Punkt Z, der Collimationsstrahl

des eingestellten Objectes den Punkt S, der Strahl der Axe II. den Punkt K.

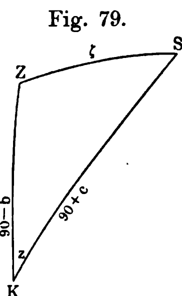


Fig. 79.

Diese drei Punkte bilden das Kugeldreieck KZS mit den Seiten ζ, $90^0 + c$, $90^0 - b$ und dem $\angle K = z$. b ist die Neigung von Strahl k gegen den Horizont, also $\widehat{KZ} = 90^0 - b$; c ist der Collimationsfehler, also $\widehat{KS} = 90^0 + c$; $\widehat{ZS} = \zeta$ ist die Zenitdistanz.

Wird der Cosinussatz auf Seite ζ angewandt, so entsteht:

$$\cos\zeta = \cos(90^0 - b)\cos(90^0 + c) + \sin(90^0 - b)\sin(90^0 + c)\cos z,$$

also:

$$\cos\zeta = -\sin b \sin c + \cos b \cos c \cos z.$$

Dieses ist die gesuchte Beziehung; es handelt sich nur darum, ihr durch rechnerische Umformung eine durchsichtigere Gestalt zu geben.

Wird das Glied $\sin b \sin c$ mit $\sin^2\frac{1}{2}z + \cos^2\frac{1}{2}z = 1$ multiplicirt und $\cos^2\frac{1}{2}z - \sin^2\frac{1}{2}z$ für $\cos z$ gesetzt, so folgt:

$$\cos\zeta = -\sin b \sin c \cos^2\frac{1}{2}z - \sin b \sin c \sin^2\frac{1}{2}z$$
$$+ \cos b \cos c \cos^2\frac{1}{2}z - \cos b \cos c \sin^2\frac{1}{2}z,$$

$$\cos\zeta = \cos(b + c)\cos^2\frac{1}{2}z - \cos(b - c)\sin^2\frac{1}{2}z;$$

nun ist:

$$-\cos z = \quad -\cos^2\frac{1}{2}z \quad + \sin^2\frac{1}{2}z,$$

folglich:

$$\cos\zeta - \cos z = -[1 - \cos(b+c)]\cos^2\frac{1}{2}z + [1 - \cos(b-c)]\sin^2\frac{1}{2}z,$$

da

$$1 - \cos(b \pm c) = 2\sin^2\frac{1}{2}(b \pm c),$$

so wird:

$$\cos\zeta - \cos z = -2\sin^2\frac{1}{2}(b+c)\cos^2\frac{1}{2}z + 2\sin^2\frac{1}{2}(b-c)\sin^2\frac{1}{2}z;$$

b und c sind kleine Bogen, also sind die beiden Seiten der Gleichung kleine Zahlen. Die linke Seite liefert streng:

$$\cos\zeta - \cos z = -2\sin\frac{1}{2}(\zeta - z)\sin\frac{1}{2}(\zeta + z).$$

Da aber ζ und z wenig verschieden sind, so darf man setzen:

$$-2\sin\frac{1}{2}(\zeta - z)\sin\frac{1}{2}(\zeta + z) = -(\zeta - z)\sin 1''\sin z;$$

ebenso rechts:

$$\sin^2\frac{1}{2}(b \pm c) = \left[\frac{1}{2}(b \pm c)\sin 1''\right]^2;$$

also wird:

$$(\zeta - z)\sin 1''\sin z = \frac{1}{2}(b+c)^2\sin^2 1''\cos^2\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}(b-c)^2\sin^2 1''\sin^2\frac{1}{2}z.$$

Da

$$\sin z = 2\sin\frac{1}{2}z\cos\frac{1}{2}z,$$

so folgt:

$$\zeta - z = \frac{1}{4}(b+c)^2\sin 1''\, ctg\,\frac{1}{2}z - \frac{1}{4}(b-c)^2\sin 1''\, tg\,\frac{1}{2}z.$$

Führt man die Quadrate aus und berücksichtigt, dafs

$$ctg\,\frac{1}{2}z - tg\,\frac{1}{2}z = 2\,ctg\,z;\quad ctg\,\frac{1}{2}z + tg\,\frac{1}{2}z = 2\,cosec\,z,$$

so wird das Resultat der Umformung:

$$\zeta = z + \frac{1}{2}(b^2 + c^2)\sin 1''\, ctg\,z + bc\sin 1''\, cosec\,z;$$

b und c treten also nur als Quadrate oder Producte auf.

Da $b\sin 1''$ und $c\sin 1''$ kleine Werthe sind, so wird man bei grofsen und mittleren Zenitdistanzen, für welche $ctg\,z$ und $cosec\,z$ keine zu grofsen Zahlen sind, setzen dürfen

$$\zeta = z\ldots$$

Ist z dagegen klein, so mufs die vorstehende Formel angewandt und die Einstellung möglichst genau vorgenommen werden.

Indexfehler des Azimutalkreises und Azimutbestimmung.

212. Wir hatten die genäherten Zenitdistanzen z_r und z_l ausdrückt in der Form (Nr. 206., Ende):

$$z_r = H'_r + i; \qquad z_l = 360^0 - (H'_l + i),$$

$$\text{wo } H'_r = H_r + n_r\,\varepsilon'' \text{ und } H'_l = H_l + n_l\,\varepsilon''$$

die für das Niveau verbesserten Ablesungen des Ordinatenkreises, n_r und n_l die Ausschläge der Blase und i den Indexfehler des Höhenkreises bedeuteten.

In eine analoge Form lassen sich die für das Azimut (Nr. 195.) aufgestellten Gleichungen bringen.

Dieselben lauteten:

K. R. $a = (A_r - M - 90^0 - c \, cosec \, z - b_r \, ctg \, z)^0_{360}$,

K. L. $a = (A_l - M + 90^0 + c \, cosec \, z + b_l \, ctg \, z)^0_{360}$.

Hierin bedeutet M *die Ablesung des Azimutalkreises, wenn Strahl k der Axe II. im Verticalflügel des Südstrahles von J liegt;* A_r, bezw. A_l die Ablesung; b_r, bezw. b_l die Neigung von k; c den Collimationsfehler und z die Zenitdistanz des eingestellten Objectes vom Azimut a. c gilt als vorher ermittelt (Nr. 217.); b_r und b_l werden durch das Reiterniveau gefunden; z ergibt sich, wenn bei der Einstellung gleichzeitig der Höhenkreis abgelesen wird.

Die zweite Gleichung läfst sich schreiben, weil $+ 90^0 = - 90^0 + 180^0$,

K. L. $a = (A_l + 180^0 - M - 90^0 + c \, cosec \, z + b_l \, ctg \, z)^0_{360}$.

Versteht man *ein für alle Mal* unter B_l die Zahl $(A_l + 180)^0_{360}$, so wird $B_l = A_l + 180^0$, wenn $A_l < 180^0$; $B_l = A_l - 180^0$, wenn $A_l > 180^0$, und:

K. L. $a = (B_l - M - 90^0 + c \, cosec \, z + b_l \, ctg \, z)^0_{360}$.

Dadurch erhalten unsere beiden Gleichungen die übereinstimmende Form:

K. R. $a = [(A_r - c \, cosec \, z - b_r \, ctg \, z) - (M + 90^0)]^0_{360}$,

K. L. $a = [(B_l + c \, cosec \, z + b_l \, ctg \, z) - (M + 90^0)]^0_{360}$.

213. Wir führen ein:

$$\varDelta A = -(M + 90)^0_{360}$$

und

$$\varDelta A' = \varDelta A + 360^0.$$

Ist also der numerische Werth von $\varDelta A$ gröfser als 180^0, so ist der numerische Werth von $\varDelta A'$ kleiner als 180^0.

Wir nennen

$$A'_r = (A_r - c \, cosec \, z - b_r \, ctg \, z)_{360},$$
$$B'_l = (B_l + c \, cosec \, z + b_l \, ctg \, z)^0_{360}$$

die *für den Collimationsfehler und die Axenneigung verbesserten Ablesungen*, $\varDelta A$ *den negativen*, $\varDelta A'$ *den positiven Indexfehler des Azimutalkreises* und erhalten mittels dieser Werthe:

K. R. $a = (A'_r + \varDelta A)^0_{360} = (A'_r + \varDelta A')^0_{360}$,

K. L. $a = (B'_l + \varDelta A)^0_{360} = (B'_l + \varDelta A')^0_{360}$.

Das Azimut ist also dargestellt als die Summe der verbesserten Ablesung und des Indexfehlers. Ist der Indexfehler bekannt, so läſst sich das Azimut aus der Ablesung sowohl bei K. R., wie bei K. R. ableiten.

214. Da der Indexfehler von der Ablesung M des Ordinatenflügels abhängt, welcher den Südstrahl enthält, so wird er nur bei einer festen Aufstellung des Instrumentes als constant betrachtet werden dürfen; und auch hier wird es nöthig sein, irdische feste Objecte während der Beobachtungen wiederholt einzustellen und darauf hin zu prüfen, ob die zugehörige Ablesung unverändert geblieben ist.

Bei einem transportablen Instrumente, welches vor jedem Gebrauch neu aufgestellt werden muſs, kann von einem constanten Indexfehler des Azimutalkreises nicht die Rede sein. Falls aber das Azimut eines irdischen Objectes bekannt ist für den Ort der Beobachtung, so läſst sich der Indexfehler für jede neue Aufstellung schnell finden.

Denn wenn a das bekannte Azimut ist, und die Einstellung bei K. R. und K. L. die verbesserten Ablesungen A'_r und B'_l geliefert hat, so erhält man aus Nr. 213.:

$$\varDelta A, \text{ bezw. } \varDelta A' = a - A'_r = a - B'_l,$$

je nachdem die Differenzen negativ oder positiv sind, und als Mittel:

$$\text{Indexfehler} = a - \frac{1}{2}(A'_r + B'_l).$$

Diese Zahl ist entweder gleich dem negativen $\varDelta A$ oder gleich dem positiven $\varDelta A'$.

Kennt man aber von keinem festen Objecte das Azimut, so wird man den Indexfehler zunächst astronomisch bestimmen und darauf, mittels desselben, die Azimute geeigneter irdischer Objecte. Alsdann läſst sich bei jeder neuen Aufstellung so verfahren, wie unmittelbar vorher angegeben wurde. Ueberall da, wo der Reisende mehrere Tage bleibt, wird es sich für ihn empfehlen, in dieser Weise zu operiren. In Nr. 267. wird gezeigt werden, wie die astronomische Beobachtung anzustellen ist. An dieser Stelle sei nur Folgendes bemerkt:

215. Wenn man die „Zeit kennt“, d. h. Stand und Gang der Beobachtungsuhr (Nr. 220.), so kennt man auch den Stundenwinkel t

eines Sternes, bezw. der Sonne für den Moment einer Uhrablesung. Beobachtet man den Durchtritt eines Gestirnes durch den verticalen Mittelfaden, so erhält man gleichzeitig eine Ablesung des Azimutalkreises und der Uhr. Zur Berechnung des Azimutes a bedient man sich entweder der aus (A) 1. und (C) 1. von Nr. 162. hervorgehenden Gleichung:

$$tg\, a = \frac{sin\, t}{sin\, \varphi\, cos\, t - cos\, \varphi\, tg\, \delta},$$

oder der Gleichungen (Nr. 165.):

$$tg\, \frac{1}{2}(a - q) = \frac{sin\, \frac{1}{2}(\varphi + \delta)}{cos\, \frac{1}{2}(\varphi - \delta)}\, tg\, \frac{1}{2}\, t,$$

$$tg\, \frac{1}{2}(a + q) = \frac{cos\, \frac{1}{2}(\varphi + \delta)}{sin\, \frac{1}{2}(\varphi - \delta)}\, tg\, \frac{1}{2}\, t.$$

Leitet man aus der azimutalen Ablesung die verbesserte Ablesung A'_r, bezw. B'_l ab, so erhält man $\varDelta A$ aus der Differenz des Azimuts und der verbesserten Ablesung gemäfs Nr. 214.

216. Wenn der Collimationsstrahl f des Fernrohres sowohl bei K. R. wie bei K. L. dem Südstrahl von J gleichgerichtet ist (vergl. Nr. 185.), so ist $z = 90^0$, $a = 0^0$; $cosec\, z = 1$, $ctg\, z = 0$.

Ist $A_{r,0}$ die Ablesung bei K. R., so wird $c\, cosec\, z + b\, ctg\, z = c$, also $(A_{r,0} - c)^0_{360}$ die verbesserte Ablesung; ist $B_{l,0}$ die Ablesung bei K. L., so wird $(B_{l,0} + c)^0_{360}$ die verbesserte Ablesung.

Man nennt $A_{r,0}$ und $B_{l,0}$ die *Meridianablesungen* bei K. R. und K. L.

Da

$$\varDelta A = a - A'_r = a - B'_l$$

für $a < A'_r$, $a < B'_l$ den negativen Indexfehler liefert, so folgt für $a = 0$, $z = 90^0$:

$$\varDelta A = -(A_{r,0} - c)^0_{360}, \quad \varDelta A = -(B_{l,0} + c)^0_{360},$$

$$\varDelta A = -\frac{1}{2}(A_{r,0} + B_{l,0}),$$

$$A_{r,0} = (-\varDelta A + c)^0_{360}, \quad B_{l,0} = (-\varDelta A - c)^0_{360},$$

wo in der letzten Gleichung an Stelle von ΔA auch die positive Indexcorrection $\Delta A'$ gesetzt werden darf.

Ist der Collimationsfehler c gleich Null, so liefert die Meridianeinstellung (Einstellung des Südpunktes) denselben Werth für $A_{r,0}$ und $B_{l,0}$, und dieser Werth ist gleich dem numerischen Werthe des negativen Indexfehlers.

Bestimmung des Collimationsfehlers.

217. Wenn ϱ *die Excentricität des Fernrohres*, d. h. die Entfernung der Collimationsaxe f vom Mittelpunkt J des Instrumentes, und d die Entfernung des eingestellten Objectes bedeuten (s. Nr. 183.), so gelten die beiden Gleichungen:

$$\text{K. R.} \quad a = \left(A_r - \left(c + \frac{\varrho}{d}\,\frac{1}{\sin 1''}\right) \operatorname{cosec} z - b_r \operatorname{ctg} z + \Delta A\right)^0_{360},$$

$$\text{K. L.} \quad a = \left(B_l + \left(c + \frac{\varrho}{d}\,\frac{1}{\sin 1''}\right) \operatorname{cosec} z + b_l \operatorname{ctg} z + \Delta A\right)^0_{360},$$

wo b_r und b_l die Neigung des Strahles k in beiden Lagen und c den Collimationsfehler bezeichnet.

Durch Subtraction und eine kleine Umformung entsteht:

$$c + \frac{\varrho}{d}\,\frac{1}{\sin 1''} = \frac{1}{2}\,(A_r - B_l) \sin z - \frac{1}{2}\,(b_r + b_l) \cos z.$$

Will man also den Collimationsfehler durch ein irdisches Object bestimmen — was sich auf Reisen am meisten empfiehlt —, so wird man gut thun, ein so weit entferntes Object zu wählen, dafs $\frac{\varrho}{d}\,\frac{1}{\sin 1''}$ vernachläfsigt werden kann; hat aufserdem das Object eine so grofse Zenitdistanz, dafs gesetzt werden darf $\sin z = 1\ldots$, $\cos z = 0\ldots$, so folgt:

$$c = \frac{1}{2}\,(A_r - B_l)\ldots$$

als einfachste Form für die Bestimmung des Collimationsfehlers.

Rückblick auf die Theorie des Universalinstrumentes U. I.

218. 1. Das U. I. besitzt zwei Drehaxen, deren Schnittpunkt J den Mittelpunkt des Instrumentes liefert.

2. Der Collimationsstrahl f des excentrisch gelegenen Fernrohres kann in zweifacher Weise auf ein Object O eingestellt werden und liefert bei K. R., bezw. bei K. L. den centrischen Parallelstrahl III. r, bezw. III. l.

3. Durch jede Lage von f wird eine Ablesung A des Azimutalkreises bestimmt und eine Ablesung H des Höhenkreises.

4. Aus der Ablesung A läfst sich das Azimut, aus der Ablesung H die Zenitdistanz des J-Strahles III. r, bezw. III. l finden.

5. Bedingt die excentrische Lage des Fernrohres keine Parallaxe für das eingestellte Object O, so sind Azimut und Zenitdistanz des centrischen Visirstrahles JO gleich denen von III. r bei K. R. und von III. l bei K. L.

6. Ist in Folge der Nähe des Objectes O eine Parallaxe von $\delta\omega$ Bogensecunden vorhanden (Werth des Winkels JOF in Fig. 66 und 67) und ist z' die Zenitdistanz von III. r und III. l, so ist das Azimut des Strahles JO für Einstellung bei K. R. um $\delta\omega'' \operatorname{cosec} z'$ kleiner als das Azimut von III. r und für Einstellung bei K. L. um ebenso viel gröfser als das von III. l. Dagegen ist die Zenitdistanz z des Strahles JO nur um $\frac{1}{2}\ \delta\omega''^2 \operatorname{ctg} z' \sin 1''$ gröfser, als die einander gleichen Zenitdistanzen z' von III. r und III. l (Nr. 186.).

7. Das U. I. ist als der Träger desjenigen azimutalen Polar-Coordinatensystems (Nr. 179.) anzusehen, dessen Ursprung der Mittelpunkt J des Instrumentes ist. Ihm ordnet sich ein Parallelsystem zu, dessen Ursprung das Erdcentrum C ist.

8. Sind a und z die Coordinaten eines instrumentalen J-Strahles, so sind sie gleichzeitig die Coordinaten des geocentrischen Parallelstrahles. Ist das eingestellte Object ein Fixstern S, d. h. ein Object ohne Parallaxe, so ist auch der geocentrische Parallelstrahl von JS auf den Stern S gerichtet, d. h. das U. I. liefert das Azimut und die Zenitdistanz des geocentrischen Visirstrahles CS.

9. Hat aber das Gestirn S *Parallaxe* (Nr. 76.), d. h. besitzen der instrumentale und der geocentrische Visirstrahl einen angebbaren Richtungsunterschied, so ist der geocentrische Parallelstrahl des Strahles JS nicht länger auf den Stern gerichtet.

Vielmehr ist er anzusehen als der geocentrische Visirstrahl eines fictiven „parallaktischen“ Gestirns S_p der Himmelskugel, und *es sind a und z anzusehen als die Coordinaten dieses parallaktischen Gestirns.*

Mittels einer geometrisch-geodätischen Betrachtung, welche in die Theorie der Parallaxe (Nr. 315. ff.) gehört, lassen sich aus den durch Beobachtung erhaltenen Coordinaten des „parallaktischen“ Gestirns S_p die des „wahren“ Gestirns S durch Rechnung ableiten, so daſs also auch für diesen Fall das Instrument nichts von seiner Verwerthbarkeit einbüſst.

Siebenter Abschnitt.

Messungsmethoden für Zeit, Polhöhe und Azimut.

Zeitbestimmung durch Messung von Zenitdistanzen bei bekannter Polhöhe.

219. Alle Beobachtungen, welche dazu dienen, den *Stundenwinkel eines Gestirns* von bekannter Rectascension zu ermitteln, heifsen *Zeitbestimmungen.*

Zu diesem Zwecke bedient man sich auf Reisen der Messung von Zenitdistanzen und leitet hieraus zunächst den Abstand τ ab, welchen der Stundenkreis des Sternes von dem oberen Meridian besitzt. Es geschieht dies mit Hilfe der Gleichung II., 1. in Nr. 161:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \tau,$$

welche zur rechnerischen Bequemlichkeit umgeformt werden wird. Wir setzen voraus, dafs die geographische Breite φ des Beobachtungsortes und die Declination δ des beobachteten Gestirns bekannt sind. Die Zenitdistanz z wird durch Einstellen des Sterns in dem Fernrohr des Universal-Instrumentes und durch Ablesen des Höhenkreises nach den Auseinandersetzungen des vorangegangenen Abschnitts erhalten.

220. Eine solche Beobachtung würde ganz zwecklos sein, wenn dem Beobachter nicht gleichzeitig eine *Uhr* zu Gebote stünde, welche im Augenblick der Beobachtung, d. h. des Einstellens auf die Mitte des Fadenkreuzes, abgelesen würde. Denn die eigentliche Aufgabe einer Zeitbestimmung besteht darin: 1. aus dem ermittelten Stundenwinkel die Sternzeit und die mittlere Zeit abzuleiten, 2. die so erhaltenen Angaben mit der Angabe

der Uhr im Augenblick der Beobachtung zu vergleichen und daraus zunächst den *Uhrstand*, auch *Uhrcorrection* genannt, herzuleiten.

In dem Artikel „Zeitverwandlung" (Nr. 116.) wurden die Relationen zwischen dem Stundenwinkel t eines Sternes von der $AR\alpha$, der wahren Zeit $t_\odot$, der mittleren Zeit t_m und der Sternzeit ϑ aufgestellt. Wir hatten erhalten:

$$\vartheta = (t + \alpha)^0_{24}$$
$$t_m = (\vartheta - \vartheta_0)^0_{24}\,(1 - \delta\alpha) = (t + \alpha - \vartheta_0)^0_{24}\,(1 - \delta\alpha)$$
$$t_m = (t_\odot + \omega)^0_{24},\ t_\odot = (t_m - \omega)^0_{24}.$$

Hierin werden die Gröfsen ϑ_0 und ω aus den Angaben des Nautischen Jahrbuches (s. S. 285ff.) abgeleitet: ϑ_0 ist die Sternzeit im letzten mittleren Ortsmittag, also gleichzeitig die Rectascension der in diesem Augenblick culminirenden mittleren Sonne S_m; ω ist die Zeitgleichung des Augenblicks, d. h. die Differenz $\alpha_\odot - \alpha_m$ der Rectascensionen von $\odot$ und S_m.

Der Stundenwinkel t des Sterns ist $= \tau$, wenn der Stern bei der Beobachtung im Westen des Meridians stand, und $= 24^h - \tau$, wenn er im Osten stand.

Der Stundenwinkel t_m der mittleren Sonne S_m oder die mittlere Zeit und der Stundenwinkel ϑ des Frühlingspunktes Υ oder die Sternzeit sind also als bekannt anzusehen, sobald τ ermittelt ist.

Uhren, Uhrcorrection und Uhrgang.

221. Jede Vorrichtung, bei welcher sich ein Zeiger *gleichförmig* um den Mittelpunkt eines getheilten Kreises dreht, kann als ein „*Zeitmesser*", griechisch: „*Chronometer*", aufgefafst werden. Indefs geben wir ihr den Namen *Uhr* erst dann, wenn sich eine *volle Zeigerumdrehung* entweder in *24 Sternstunden* oder in *24 mittleren Stunden* oder in *12 mittleren Stunden* vollzieht. Danach unterscheiden wir drei verschiedene Klassen von Uhren, nämlich solche, welche *Sternzeit gehen*, solche, welche *astronomische mittlere Zeit gehen*, und solche, welche *bürgerliche mittlere Zeit gehen.*

Für die ersten beiden Klassen ist der Kreis des Zifferblattes in *24 gleiche Theile* getheilt; die Theilpunkte werden *rechtsherum* im Sinne der Zeigerdrehung mit I., II., ..., XXIV. bezeichnet;

für die letzte Klasse, zu welcher die meisten Uhren, Taschenuhren und Pendeluhren, gehören, ist der Zifferblattkreis in *12 gleiche Theile* getheilt; die Theilpunkte erhalten rechtsherum die Bezeichnung I., II., ..., XII.

222. Auch der Reisende benutzt fast nur Uhren, welche bürgerliche Zeit gehen. Diese Uhren — drei bis vier an Zahl — müssen nach der nun auseinanderzusetzenden Methode mehrere Monate lang vor Antritt der Reise geprüft werden. Sie schwingen meist fünftel Secunden. Die Dauer einer Hin- und Rückschwingung beträgt alsdann 0^s4 und kann von dem Ohr durch das „Ticken" der Uhr aufgefafst werden. Dasselbe besteht abwechselnd aus einem accentuirten und einem schwächeren Schlage. Bezeichnet man ersteren als *Uhrschlag*, so liegen 0 4 zwischen zwei Uhrschlägen. Bei Chronometern fällt der schwächere Schlag ganz aus; das Ticken wird dadurch reiner. Für die Beobachtungen selbst wird man sich eines Chronometers mit Vortheil bedienen, aber Chronometer bleiben in Folge ihrer schwereren Unruhe bei kleinen Stöfsen leicht einmal stehen und setzen sich wieder in Gang, ohne dafs der Reisende, welcher sie trägt, es direct wahrnimmt; dadurch werden sie unbrauchbar für „Zeitübertragung".

Aufser dem Stundenzeiger und dem Minutenzeiger besitzen alle Präcisionsuhren einen Secundenzeiger; derselbe mufs über Strich 60 der Secundentheilung stehen, wenn der Minutenzeiger über einem Minutenstrich steht. Das Zifferblatt und die Zeiger dürfen nur durch ein starkes Glas geschützt sein, nicht durch eine Metallkapsel (à savonette), deren unvermeidliches Oeffnen und Schliefsen von der schädlichsten Einwirkung auf das schnelle und richtige Ablesen der Uhr ist. Letzteres geschieht nicht im Augenblick der Beobachtung; vielmehr werden von diesem Zeitpunkt ab die *Doppelschläge* der Uhr ($^4/_5$ Secunden) gezählt, bis der Secundenzeiger über einem Theilstrich steht. Sind z. B. sieben Doppelschläge gezählt worden, so sind $7 \cdot \frac{4}{5} = 7 \cdot 0^s8 = 5^s6$ vergangen, und um so viel mufs die Uhrablesung erniedrigt werden.

223. Die 12 gleichen Centriwinkel, in welche die Zifferblattebene einer bürgerlichen Uhr durch die 12 Kreispunkte I., II., ... zerlegt wird, sollen *Zifferblattstunden* heifsen, im Gegensatz zu

unseren *Winkelstunden*, von denen 24 die Ebene bilden. Geht die Uhr genau bürgerliche Zeit, so beschreibt der Uhrzeiger (Stundenzeiger) eine Zifferblattstunde in einer Stunde mittlerer Zeit; derselbe hat also *eine doppelt so grofse Drehungsgeschwindigkeit* wie der Zeiger einer astronomischen Uhr.

Wir nehmen an, dafs bei einer Zeitbestimmung die bürgerliche Beobachtungsuhr in dem Augenblick der Beobachtung die Ablesung U geliefert habe. Aus der Zenitdistanz z sei zunächst τ, dann t und hieraus t_m abgeleitet worden. Schreiben wir T statt t_m, so bezeichnet nunmehr T die mittlere Zeit der Uhrzeit U.

Denken wir uns *aufser dem Uhrzeiger* einen *zweiten idealen Zeiger* angebracht, welcher nicht nur genau mittlere Zeit geht, d. h. in einer Stunde M. Z. eine Zifferblattstunde beschreibt, sondern auch durch seine Ablesung *direct* die mittlere Zeit des Augenblicks liefert, so wird derselbe zur Uhrzeit U die Ablesung T liefern. Dieser Zeiger soll der *Zeitzeiger* heifsen.

Der nach links genommene Abstand des Uhrzeigers vom Zeitzeiger soll mit $\varDelta U$ (für die Einheit der Zifferblattstunde) bezeichnet werden; dann ist

$$\varDelta U \text{ entweder } = T - U \text{ oder } = T - U + 12^h, \text{ d. h. stets}$$
$$\varDelta U = (T - U)_{12}^0.$$

Wir nennen $\varDelta U$ die *positive* und $\overline{\varDelta U} = \varDelta U - 12^h$ die *negative Uhrcorrection*.

So lange der Zeitzeiger und der Uhrzeiger *denselben* Abstand bei ihren Drehungen behalten, wird

$$T' = (U' + \varDelta U)_{12}^0 = (U' + \overline{\varDelta U})_{12}^0$$

sein, wenn T' die mittlere bürgerliche Zeit und U' die Uhrzeit desselben Augenblicks bedeuten. Ohne Kenntnifs der Correction kann man zwar ein *Zeitintervall* aus der *Differenz* zweier Ablesungen ableiten; aber nur wenn wir die Uhrcorrection kennen, ist es uns möglich, die *richtige bürgerliche Zeit* zu finden.

224. In Wirklichkeit bleibt nun die Uhrcorrection nicht constant; auch von der besten Uhr erwartet man das nicht, wohl aber verlangt man von einer sogenannten *Präcisionsuhr*, *dafs die Drehung ihres Zeigers innerhalb angemessener Grenzen und bei gleichmäfsiger Behandlung als gleichförmig angesehen werden darf.* Diese Annahme wollen wir machen.

Alsdann ändert sich der Abstand des Uhrzeigers vom Zeitzeiger langsam, aber gleichförmig, und es besitzt der Uhrzeiger eine *relative gleichförmige Links- oder Rechtsdrehung* gegen den Zeitzeiger. Im ersten Falle dreht sich der Uhrzeiger *langsamer*, im zweiten Falle dreht er sich *schneller* als der Zeitzeiger.

Nehmen wir an, dafs die Relativdrehung während eines Uhrtages, d. h. während 24 Uhrstunden, (g) Zifferblattsecunden betrage und dafs $g = +(g)$, bezw. $-(g)$ gesetzt werde, je nachdem die Relativdrehung *links-*, bezw. *rechtsherum* erfolgt. War $\varDelta U_0$ die Uhrcorrection im Anfang des Zeitintervalls von D Uhrtagen und ist sie gleich $\varDelta U$ am Ende, so wird, falls der Uhrzeiger die Lage des Zeitzeigers inzwischen *nicht* passirt hat:

$$\varDelta U = \varDelta U_0 + D g^s,$$

also

$$g^s = \frac{(\varDelta U - \varDelta U_0)^s}{D}.$$

Die Zahl D ergibt sich aus der Anzahl der Tage, welche zwischen dem ersten und letzten Tage liegen und aus den Uhrzeiten, welche zu Anfang und zu Ende des Intervalls D abgelesen worden sind.

Man sieht also, dafs g bestimmt werden kann, wenn zu Anfang und Ende eines Zeitintervalls von D Uhrtagen Zeitbestimmungen gemacht worden sind. Ist g bekannt, so ist für den Endpunkt eines Zeitintervalls D', welches mit dem Zeitintervall D denselben Anfang hat, die Uhrcorrection $\varDelta U'$ gegeben durch:

$$\varDelta U' = \varDelta U_0 + D' g^s.$$

Da $\overline{\varDelta U} = \varDelta U - 12^h$, so kann g^s auch mittels der negativen Uhrcorrection bestimmt werden; denn es wird:

$$\overline{\varDelta U'} = \overline{\varDelta U_0} + D' g^s \text{ und } g^s = \frac{(\overline{\varDelta U} - \overline{\varDelta U_0})^s}{D}.$$

In praxi versteht man unter Uhrcorrection schlechtweg die numerisch kleinere. Ist z. B. $\varDelta U = +11^h 43^m 9^s$, also $\overline{\varDelta U} = -16^m 51^s$, so gilt $-16^m 51^s$ als Correction.

Wenn in der Zwischenzeit D der *Uhrzeiger durch den Zeitzeiger tritt*, so wird
bei relativer *Linksdrehung:*

$$\varDelta U - \overline{\varDelta U_s} = D g^s, \text{ also } g^s = \frac{(\varDelta U - \overline{\varDelta U})^s}{D};$$

bei relativer *Rechtsdrehung:*

$$-\overline{\Delta U} + \Delta U^s = -D g^s, \text{ also } g^s = \frac{(\overline{\Delta U} - \Delta U)^s}{D}.$$

Dies ergiebt sich ohne Weiteres, wenn man in jedem Fall die beiden Lagen des Uhrzeigers und die des Zeitzeigers hinzeichnet und bedenkt, daſs g bei der Linksdrehung positiv, bei der Rechtsdrehung negativ ist.

225. Aus der Bedeutung von g^s folgt: während der Uhrzeiger 24 Zifferblattstunden beschreibt, beschreibt der Zeitzeiger g Zifferblattsecunden *mehr*, bezw. *weniger*, je nachdem g *positiv*, bezw. *negativ* ist. Nun verflieſst eine Uhrstunde, wenn der Uhrzeiger eine Zifferblattstunde beschreibt, und es verflieſst eine Stunde mittlerer Zeit, wenn der Zeitzeiger eine Zifferblattstunde beschreibt; also verflieſsen *24 mittlere Stunden* $+ g$ *mittlere Secunden* innerhalb *24 Uhrstunden*, wo g positiv oder negativ sein kann. g, auf die Einheit der Zeitsecunde bezogen, heiſst der *tägliche Gang der Uhr*; ist g *positiv*, so dreht sich der *Uhrzeiger langsamer*, ist g *negativ*, so dreht er sich *schneller als der Zeitzeiger*. Man unterscheidet die Fälle als *positiven und negativen Gang der Uhr.*

226. Da es der Zweck jeder Uhr ist, die genaue Zeit für den Moment einer Ablesung zu liefern, und dieses nur möglich ist mit Hilfe der Uhrcorrection und des Ganges, so ist es von gröſster Bedeutung, daſs der Reisende möglichst häufig Zeitbestimmungen vornimmt. Er ist dann sogar im Stande — namentlich wenn sein Weg Schleifen macht — Längendifferenzen durch Zeitübertragung zu ermitteln. Denn wenn ihm seine Uhr die Zeit des Ausgangsortes mittels des bekannten Ganges liefert und eine Zeitbestimmung die Uhrcorrection des Beobachtungsortes, so kennt er für denselben Zeitpunkt die Stundenwinkel t'_m und t_m der mittleren Sonne für *beide* Orte. Aus der Zeitdifferenz $t'_m - t_m$ und ihrem Zeichen wird der Meridianabstand geliefert, also auch die geographische Länge des Beobachtungsortes, wenn die des Ausgangsortes bekannt ist (Nr. 82. Ende).

Tritt an Stelle einer bürgerlichen Uhr eine astronomische Uhr entweder für mittlere oder für Sternzeit, so können die vorstehenden Betrachtungen nahezu wörtlich wiederholt werden; nur wird nunmehr die Zifferblattstunde identisch mit der Winkelstunde, während sie bisher das Doppelte der letzteren bedeutete.

227. Ein Reisender wird gut thun, mindestens drei Präcisionsuhren bei sich zu führen und dieselben täglich mit einander zu vergleichen; er trägt sie am besten sämmtlich bei sich, und zwar in der Weichengegend, nicht auf der Brust. Die Uhren müssen zu derselben Tagesstunde aufgezogen werden, des Nachts in derselben verticalen Lage bleiben wie bei Tage und möglichst gegen heftige Temperatursprünge geschützt sein. Auch versäume man nicht, die Taschen, in welchen die Uhren getragen werden, täglich umzukehren und auszubürsten.

Zeitbestimmungen in beiden Lagen des Instrumentes und ihre Anordnung zu einem Beobachtungssatz.

228. Läfst sich ein Resultat, in unserem Falle die Uhrcorrection, so oft aus einer Reihe gleichartiger Beobachtungen herleiten, wie die Anzahl der letzteren beträgt, so ist es Princip, mehrere Beobachtungen abwechselnd bei K. R. und K. L. anzustellen. Dadurch ordnen sich die Beobachtungen paarweise zusammen. Eine beliebige Anzahl solcher Paare, etwa drei bis fünf, heifst ein *Beobachtungssatz*.

Die Zenitdistanz z ist gegeben (Nr. 206.):

bei K. R. durch $z = (H'_r + i)$,
bei K. L. durch $z = 360^0 - (H'_l + i)$,

wenn H'_r und H'_l die *verbesserten Ablesungen* und i den *Indexfehler* des Höhenkreises bezeichnen. i wird durch Beobachtungen bestimmt, darf also nicht als absolut richtig gelten und kann auch kleine Aenderungen erfahren. Nun tritt i bei K. R. mit dem Zeichen plus, bei K. L. mit dem Zeichen minus zur Bildung von z auf. Ist i also fehlerhaft, und wird z in dem einen Falle zu grofs, so wird es in dem anderen Falle um ebensoviel zu klein. Durch ein zu grofses z wird das zu berechnende τ (Abstand des Stern-Stundenkreises vom oberen Meridian) zu grofs, durch ein zu kleines z wird τ zu klein; und in dem Resultat für $\varDelta U$ wird sich das *Mittel* der beiden für K. R. und K. L. erhaltenen Werthe von dem Fehler in i um so freier halten, je näher beide Beobachtungen an einander liegen, je geringer also die Aenderung der Zenitdistanz ist.

Hat man $\varDelta U$ aus jedem Paar ermittelt, so wird das *Mittel der Paare* zuverlässiger sein, als das aus einem *einzigen Paar* gewonnene Resultat, weil ein Theil der zufälligen Fehler, welche vorhanden, aber nicht angebbar sind, sich gegenseitig in ihren Folgen zerstören. Es kann aber z auch in Folge fehlerhaft angenommener Refraction (Nr. 234. b.) oder in Folge constanter Fehler des Instruments oder in Folge constanter Fehler des Beobachters stets entweder zu groſs oder zu klein ausfallen. Ebenso können φ und δ mit Fehlern behaftet sein.

Um diese Einflüsse möglichst unschädlich zu machen, veranstaltet man *zwei* Beobachtungssätze, den einen im *Westen*, den andern im *Osten des Meridians*; wenn es angeht, *möglichst symmetrisch zum Meridian* und in wenig verschiedenen Zenitdistanzen. Das Mittel der Werthe von $\varDelta U$, welche sich aus den verschiedenen Beobachtungen ergeben, wird alsdann ziemlich frei von den Einflüssen der constanten Fehler bleiben (s. Nr. 282.).

229. Am besten würde der Zweck erreicht werden durch Beobachtung *desselben* Sterns im Osten und Westen. Dies ist aber zeitraubend, abgesehen davon, daſs in der Zwischenzeit Wolkenbildung eintreten kann, durch welche die westliche Beobachtung unmöglich wird.

Für den *Reisenden* gilt aber *das Princip der Kräfteökonomie.* Er kann nach einem anstrengenden Tage nicht viele Stunden opfern, um ein etwas genaueres Resultat zu erhalten, als das innerhalb einer Stunde zu erhaltende. Deshalb muſs er um so eifriger darauf bedacht sein, *symmetrisch gelegene Beobachtungen zweier verschiedener Sterne, im Osten und im Westen, bei nicht zu verschiedenen Zenitdistanzen*, zu erhalten.

Als *praktische Regel* gilt, die „Zeitgestirne", d. h. die Gestirne, welche zur Zeitbestimmung dienen sollen, möglichst im Osten und im Westen bei einer Zenitdistanz zwischen 40^0 und 60^0 zu wählen.

Die günstigste Lage für einen Stern, aus dessen Zenitdistanz der Stundenwinkel gefunden werden soll, läſst sich theoretisch mit Hilfe der Differentialrechnung (s. VIII. Abschnitt, S. 292. ff.) bestimmen und tritt ein, wenn der *Stern im I. Vertical* steht [Bedingung $(\varphi) > (\delta)$, $\varphi\,\delta$ plus] oder *in der gröſsten Digression* [Bedingung $(\delta) > (\varphi)$, $\varphi\,\delta$ plus]. Es muſs aber gleichzeitig die

Bedingung erfüllt sein, daſs die Zenitdistanz z, in diesen Lagen gegeben (Nr. 171.)

$$\text{durch} \quad \cos z = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \quad \text{für den I. Vertical,}$$

$$\text{durch} \quad \cos z = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta} \quad \text{für die gröſste Digression,}$$

nicht zu groſs und nicht zu klein wird. Auſserdem verlangt die Bedingung *Gleichstimmigkeit* von φ und δ, während in praxi, namentlich in niederen Breiten, Sterne, welche, durch den Aequator vom Zenit getrennt sind ($\varphi\delta$ *minus*), auch noch sehr brauchbar sein können.

Verhaltungsmaſsregeln für das Beobachten mit dem Universalinstrument.

230. Bei der *Anstellung der Zeitbeobachtungen* beachte man Folgendes, was auch für Beobachtungen mit dem Universalinstrument *überhaupt* gilt.

Es wird rechtzeitig ein möglichst günstiger *Beobachtungsplatz* ausgesucht, ja nicht zu nahe dem Biwakplatz; denn bei Lärm oder Geräusch hört man den Schlag der Uhr nicht mehr, wenn man sie vom Ohr zur Ablesung vor das Auge führt; auch kann das Lagerfeuer störend wirken.

Die *Beobachtungslaterne* muſs zuvor sorgfältig in Stand gesetzt sein; durch ein Versagen der Laterne können die günstigsten Momente verpaſst werden, mehr noch bei Polhöhe- als bei Zeitbestimmungen.

Man schreibt zunächst in das *Beobachtungsbuch* Ort, Datum und Wochentag an die Spitze einer neuen Seite. Das Buch selbst besitzt Octavformat (17,3 × 11,4 cm), etwa 90 quadrirte Blätter und steife mit weiſser Leinwand überzogene Einbanddeckel mit abgerundeten Ecken, nach Art der Skizzenbücher. Es muſs sorgfältig gebunden sein und sich bequem auf die linke Hand legen lassen, während mit der rechten die Eintragung gemacht wird. Man legt den Bleistift vor dem Zuklappen des Buches auf die in Gebrauch befindliche Seite, damit man bei der nächsten Anschreibung nicht zu blättern braucht, sondern sofort die richtige Stelle vor sich hat. Wird das Buch nicht gebraucht, so verbleibt es in der unteren linken Seitentasche des Rockes. Sämmtliche

Seiten müssen numerirt sein; jedes Beobachtungsbuch **erhält ein** Kennzeichen, z. B. G. I., G. II., ...

231. Die Folge der vorzunehmenden Operationen ist nun:

1. *Aufstellen des U. I.*, so dafs das Reiterniveau in *jeder* Lage der Horizontalaxe II. *frei spielt*; Adjustiren der Feinstellschraube des Höhenniveaus, so dafs auch dieses frei spielt.

2. *Vergleichen der übrigen Uhren mit der Beobachtungsuhr.*

3. *Ablesen des Thermometers und Barometers* zur möglichst genauen Bestimmung der Refraction.

4. *Notiren des Beobachtungsgestirns.* Ist man im Augenblick nicht ganz sicher, *welcher* Stern beobachtet wird, so entwerfe man eine rohe Skizze, welche die Stellung des Sternes gegen andere Gestirne kenntlich macht. Dann kann man nachher mittels der *Sternkarte*, welche zur Ausrüstung gehört, die Identificirung vornehmen. Neben den Namen des Sternes setzt man entweder „Zeit“ oder „Polhöhe“ oder „Azimut“ etc., je nach dem Zwecke, welchem die Beobachtung dienen soll.

5. *Loses Einstecken der Beobachtungsuhr sammt der mit ihr verbunden bleibenden Befestigungskette* in die linke Westentasche damit die Uhr leicht herausgenommen und an das linke Ohr geführt werden kann. Die Kette macht das Halten der Uhr sicherer; die Gefahr des Wegschlüpfens wird dadurch nahezu beseitigt.

6. *Beobachtung Nr. 1* bei K. R., bezw. K. L.

Genähertes Einstellen des Sternes etwas vor dem Durchtritt durch den verticalen Mittelfaden und etwas oberhalb, bezw. unterhalb des horizontalen Mittelfadens, wenn der Stern im Osten, bezw. im Westen steht. Der Stern steht im Osten, bezw. im Westen, wenn das Bild im Fernrohr fällt, bezw. steigt. Wird ein Ocularprisma angewandt — was bei steiler Lage des Fernrohrs eine grofse Erleichterung gewährt —, so tritt das Umgekehrte ein.

7. *Auffassen des Moments der Beobachtung*; derselbe tritt für Zenitdistanzen ein, wenn der *Stern den horizontalen Mittelfaden passirt.* Man zählt die Schläge der Uhr mit 0, 0, 0,... bis zum Eintritt der Passage und dann die Doppelschläge bis zu dem Augenblick, wo der *Secundenzeiger genau mit einem Theilstrich des Secundenzifferblattes coincidirt*; dies ist der *Moment der Uhrablesung.*

8. *Aufschreiben der direct erhaltenen Uhrablesung und der gezählten Doppelschläge*, deren Werth meist $0^s 8$ ist.

9. *Notiren: K. R.*, bezw. *K. L.*

Ablesen des Höhenniveaus (hierbei darf die Niveauschraube zuvor so gedreht werden, dafs die Blase einspielt).

Ablesen beider Mikroskope des Höhenkreises, stets in derselben Folge *A*, *B* oder *I*, *II*, je nach der Bezeichnung.

Ablesen der Blasenenden des Höhenniveaus.

10. *Beobachtung Nr. 2* bei K. L., bezw. K. R.

Drehung um 180° und Durchschlagen des Fernrohrs; also Beobachtung bei K. L., wenn die Beobachtung 1 bei K. R. stattfand.

Wiederholung aller Manipulationen 6., 7., 8., 9.

11. *Beobachtung Nr. 3* bei K. L. u. s. w.

Im ganzen werden acht bis zehn Beobachtungen genommen, welche vier bis fünf Paare bilden:

K. R., K. L.; K. L., K. R.; K. R., K. L.; K. L., K. R.

12. *Ablesen des Thermometers und Barometers.*

13. *Vergleichung der drei Uhren.*

14. *Allgemeine Bemerkungen über die äufseren Bedingungen und den Zustand des Beobachters*; z. B. windstill, starker Wind, Wolkenziehen, trockene Luft, starker Thaufall, Mosquitos, durchfroren, frostklamme Finger, fiebrig, müde, in vorzüglicher Verfassung.

232. Zum guten Beobachten gehört vor Allem *Routine.* Je weniger man nachzudenken braucht, um so besser; man soll nur *dann* stutzig werden, wenn man im Begriff steht, einen *Fehler* zu begehen.

Für diese Dinge mufs die nöthige Uebung in der Heimath erworben werden; im Anfang durch Unterweisung von Seiten eines erfahrenen Lehrers und dann durch selbständiges Beobachten, wo möglich mit dem Reiseinstrument.

Diese Beobachtungen müssen auch *selbständig berechnet*, werden, wofür die Anleitung weiter unten gegeben werden wird. Die *Rechenresultate sind die besten Lehrmeister des Lernenden*; denn wenn einige Resultate, welche bei Vollkommenheit absolut übereinstimmen müfsten, stark von den übrigen abweichen, so

ist sicher ein grober Rechen- oder Beobachtungsfehler vorhanden, dem man nachspüren kann.

Es handelt sich dabei vornehmlich um Ablesungsfehler der Kreise oder der Uhr. Die meisten entstehen dadurch, dafs der Ungeübte die Richtungen der *wachsenden* und *fallenden* Ablesung verwechselt; das gilt für den Secundenkreis der Uhr wie für die Kreise des U. I. Es gewährt einen grofsen Reiz, begangene Fehler auf Grund selbständiger Berechnung, unabhängig vom Lehrer, zu entdecken; gerade dadurch lernt man sie am sichersten vermeiden.

Die Berechnung der Zeit aus Zenitdistanzen.

233. Alle Eintragungen in das Beobachtungsbuch sollen mit *Bleistift* gemacht werden. Eine *Originalbeobachtung darf niemals corrigirt oder mit Tinte überzogen werden.* Weifs man, dafs eine Beobachtung nichts oder wenig taugt, so kann man sie durch ein Kreuz oder ein Fragezeichen kennzeichnen.

234. Der erste Schritt zur Berechnung ist die *Reduction der Ablesungen.*

a. Niveau und Indexfehler des Höhenkreises.

Zunächst wird die Ablesung wegen des Niveaus verbessert. Die Niveauablesung besteht in der Ablesung der Blasenenden; ihr Mittel ist die eigentliche Niveauablesung α. Zu dieser wird $-\frac{\lambda}{2}$ gefügt, wenn λ die Länge des Niveaus ist. Ist der Werth ε'' der Niveaupars bekannt, z. B. $6''$, so bildet man $\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}\right) 6''$ und *addirt* diese Secundenzahl *algebraisch* bei *ungleichstimmigem* Niveau.

Zu dieser *verbesserten Ablesung* wird dann der *Indexfehler* i addirt, welcher als bekannt gilt. Die auf K. L. bezüglichen Werthe werden von 360^0 abgezogen. Dann liefert jede Beobachtung die dem Augenblick entsprechende *„scheinbare“ Zenitdistanz* z'.

b. Refraction.

In Wirklichkeit hat das Gestirn eine *gröfsere* Zenitdistanz, als der eingestellte Collimationsstrahl f. Denn die Richtung eines vom Stern ausgehenden Lichtstrahles wird mit seinem Eintritt in die Atmosphäre durch *Refraction* allmählich so verändert, dafs

seine Neigung gegen den Horizont wächst, also seine Zenitdistanz *kleiner* wird als die des Sternes.

Diese Richtungsänderung ist verschieden grofs, je nach der Zenitdistanz des Strahles bei seinem Eintritt in die Atmosphäre und je nach der Beschaffenheit der letzteren. Im Vergleich zu der Gröfse der Refraction sind die Beobachtungsfehler klein; z. B. beträgt die mittlere Strahlenbrechung bei einer scheinbaren Zenitdistanz von 10°: 10″, von 20°: 21″, von 30°: 34″, von 40°: 49″, von 50°: 69″ = 1′ 9″, von 60°: 101″ = 1′41″, von 70°: 159″ = 2′ 39″.

Es ist deshalb das eifrigste Bemühen der Astronomen gewesen, die Gesetze der atmosphärischen Strahlenbrechung festzustellen und Tafeln für dieselbe zu entwerfen. Solche Tafeln, bezogen auf die scheinbare Höhe $h' = 90^\circ - z'$, findet der Reisende in dem Nautischen Jahrbuch auf S. 257 bis 261.

Es mufs zunächst für jedes z' die mittlere Refraction aus den Tafeln entnommen und mittels der für Thermometer- und Barometerstand aufgestellten Correctionstafeln verbessert werden. Ist re der Betrag, so wird

$$z = z' + re$$

die wahre Zenitdistanz, sobald es sich um einen Fixstern handelt.

c. *Parallaxe.*

Ist dagegen die Sonne oder ein Planet das Zeitgestirn, so mufs noch um die Parallaxe pa corrigirt werden, d. h. um den Winkelabstand des geocentrischen und des örtlichen Visirstrahles; die Zenitdistanz des letzteren ist stets gröfser als die des ersteren, und der Unterschied pa kann aus den Tafeln 10., bezw. 11. des Nautischen Jahrbuchs entnommen werden. In diesem Falle wird:

$$z = z' + re - pa.$$

Man präge sich ein: *die Refraction hebt, die Parallaxe senkt.*

d. *Scheinbarer Halbmesser der* ⊙.

Bei Sonnenbeobachtungen kann der Mittelpunkt der ⊙ nicht eingestellt werden, sondern nur der obere ($\overline{\odot}$) oder untere ($\underline{\odot}$) Rand derselben.

Der obere und untere „Rand“ sind die beiden *Schnittpunkte* des durch das Sonnencentrum gelegten Verticals mit der sichtbaren Sonnenscheibe.

Der Halbmesser ha der ⊙ findet sich in den Ephemeriden des Nautischen Jahrbuches auf S. I. jedes Monats; seine Werthe liegen zwischen 15′ 45″ und 16′ 18″. Ist z' auf den unteren Sonnenrand $\underline{\odot}$ bezogen, so wird:

$$z = z' + re - pa - ha,$$

dagegen ergibt sich für den oberen Sonnenrand $\overline{\odot}$:

$$z = z' + re - pa + ha.$$

Logarithmische Berechnung von τ aus z.

235. Ist nun auf diese Weise die *wahre Zenitdistanz* z für jede Einzelbeobachtung gefunden, so setzt man den Werth z in die Gleichung (Nr. 219.) ein:

a) $$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\tau$$

und berechnet daraus τ auf folgende verschiedene Arten.

Zunächst werden genau so wie in Nr. 149. zwei Umformungen vorgenommen mittels der Relationen:

$$\cos\tau = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\tau \text{ und } \cos\tau = 2\cos^2\frac{1}{2}\tau - 1.$$

Setzt man den ersten Werth von $\cos\tau$ in die Cosinusgleichung ein, so entsteht:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta - 2\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{1}{2}\tau.$$

Da (Nr. 63., 4.)

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

ist, so folgt:

$$\cos z = \cos(\varphi - \delta) - 2\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{1}{2}\tau$$

$$\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{1}{2}\tau = \frac{1}{2}[\cos(\varphi - \delta) - \cos z].$$

Da (Nr. 63., 8.)

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\beta - \alpha)\sin\frac{1}{2}(\beta + \alpha)$$

ist, so folgt:

b) $$\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{1}{2}\tau = \sin\left(\frac{1}{2}z - \frac{\varphi - \delta}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}z + \frac{\varphi - \delta}{2}\right),$$

wo die Argumente der Sinus auf der rechten Seite in der Form hingeschrieben sind, welche sich für die numerische Rechnung am meisten eignet.

Der numerische Werth von $\varphi - \delta$ ist gleich der Meridian-Zenitdistanz ζ (Nr. 88. für $\zeta = \zeta_\mu$); d. h. es ist entweder $\zeta = \varphi - \delta$ oder $\zeta = -(\varphi - \delta)$; da rechts die beiden Argumente in einander übergehen, wenn $\frac{\varphi - \delta}{2}$ und $-\frac{\varphi - \delta}{2}$ mit einander vertauscht werden, so erhält man in beiden Fällen:

c) $$\cos\varphi \cos\delta \sin^2 \frac{1}{2}\tau = \sin\frac{1}{2}(z - \zeta) \sin\frac{1}{2}(z + \zeta).$$

Geben wir der Gleichung b) die Form:

d) $$\sin^2 \frac{1}{2}\tau = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}z - \frac{\varphi - \delta}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{2}z + \frac{\varphi - \delta}{2}\right)}{\cos\varphi \cos\delta},$$

wo für $\varphi - \delta$ der numerische Werth $\zeta = \varphi \sim \delta$ gesetzt werden darf, so wird $\log\sin \frac{1}{2}\tau = \frac{1}{2}S$, wenn S die Summe der vier Logarithmen von $\sin\left(\frac{1}{2}z - \frac{\varphi \sim \delta}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{1}{2}z + \frac{\varphi \sim \delta}{2}\right)$, $\frac{1}{\cos\varphi}$, $\frac{1}{\cos\delta}$ bedeutet. τ ist der Werth des *Concavwinkels*, welchen der obere Meridian mit dem Stundenkreis des Beobachtungsgestirns bestimmt; also ist $\frac{1}{2}\tau$ stets spitz und wird direct aus den Logarithmentafeln gefunden, als derjenige spitze Winkel, dessen *log sinus* gleich $\frac{1}{2}S$ ist.

Nach dieser Formel sind die Zahlenbeispiele für Zeitbestimmungen (Nr. 305., 307.) berechnet.

236. Setzt man $\cos\tau = 2\cos^2\frac{1}{2}\tau - 1$ ein in die ursprüngliche Gleichung (Nr. 235., a), so entsteht:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta - \cos\varphi \cos\delta + 2\cos\varphi \cos\delta \cos^2 \frac{1}{2}\tau.$$

Da (Nr. 63., 3.)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

ist, so folgt:

$$\cos z = -\cos(\varphi + \delta) + 2\cos\varphi \cos\delta \cos^2 \frac{1}{2}\tau$$

$$\cos\varphi \cos\delta \cos^2 \frac{1}{2}\tau = \frac{1}{2}[\cos z + \cos(\varphi + \delta)].$$

Da (Nr. 63., 7.)

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

ist, so folgt:

$$\cos\varphi\cos\delta\cos^2\frac{1}{2}\tau = \cos\left(\frac{1}{2}z - \frac{\varphi+\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{1}{2}z + \frac{\varphi+\delta}{2}\right)$$

oder:

$$\text{e)}\qquad \cos^2\frac{1}{2}\tau = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}z - \frac{\varphi+\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{1}{2}z + \frac{\varphi+\delta}{2}\right)}{\cos\varphi\ \cos\delta},$$

woraus in Verbindung mit

$$\sin^2\frac{1}{2}\tau = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}z - \frac{\varphi-\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}z + \frac{\varphi-\delta}{2}\right)}{\cos\varphi\ \cos\delta}$$

folgt:

$$\text{f)}\qquad tg^2\frac{1}{2}\tau = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}z - \frac{\varphi-\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}z + \frac{\varphi-\delta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}z - \frac{\varphi+\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{1}{2}z + \frac{\varphi+\delta}{2}\right)}.$$

Von den drei Gleichungen d) e) f) für τ gibt f) die genauesten Rechnungsresultate; aber die Gleichung d) für $\sin^2\frac{1}{2}\tau$ genügt in den meisten Fällen und bietet den Vortheil leichterer Berechnung

Berechnung eines Beobachtungssatzes.

237. Es sei bemerkt, dafs man bei Anwendung von

$$\sin^2\frac{1}{2}\tau = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}z - \frac{\varphi\sim\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}z + \frac{\varphi\sim\delta}{2}\right)}{\cos\varphi\ \cos\delta}.$$

mittels einer *Vorrechnung* zunächst das bestimmt, was gleichmäfsig für die Berechnung *jeder* Einzelbeobachtung gebraucht wird, nämlich den numerischen Werth $\frac{1}{2}(\varphi\sim\delta)$ und $\log\frac{1}{\cos\varphi} + \log\frac{1}{\cos\delta}$; ferner $\alpha - \vartheta_0$, bezw. den Mittelwerth der Zeitgleichung ω.

Ist diese Vorrechnung erledigt, so *berechnet man sämmtliche Beobachtungen gleichzeitig* (stets auf quadrirtem Papier), indem man jeden Schritt in der Berechnung der ersten Beobachtung zunächst für alle übrigen Beobachtungen wiederholt, ehe man den nächsten Schritt für die erste Beobachtung thut.

Die Berechnung einer jeden *Einzelbeobachtung* bildet eine *Verticalcolumne*, während *derselbe Rechnungsschritt* für *sämmtliche Beobachtungen* von *derselben Horizontalreihe* zu der nächst folgenden führt. Die Zahlen derselben Horizontalreihe sind wenig von einander verschieden; sie wachsen entweder oder fallen ziemlich gleichmäſsig, weil bei einem geübten Beobachter die Beobachtungen in ziemlich gleichen Abständen auf einander folgen.

Wenn daher in derselben Reihe eine Zahl stark abweicht und weit vom Mittel der beiden Nachbarzahlen absteht, so kann man sicher sein, einen Beobachtungsfehler oder einen Rechenfehler begangen zu haben.

238. Die einzelnen Schritte der Zeitberechnung bestehen nun in der successiven Bildung folgender Horizontalreihen, vorausgesetzt, daſs ein *Fixstern als Zeitgestirn* dient (vergl. Beispiel Nr. 307.).

1. Reihe der *wahren* Zenitdistanzen z.

2. Reihe der $\frac{1}{2} z$ aus 1.

3. $\frac{1}{2} (\varphi \sim \delta)$ unter jedes $\frac{1}{2} z$.

4. Reihe der $\frac{1}{2} z - \frac{1}{2} (\varphi \sim \delta) = [-]$ aus 2. und 3.

5. Reihe der $\frac{1}{2} z + \frac{1}{2} (\varphi \sim \delta) = [+]$ aus 2. und 3.

6. Reihe der $\log \sin [-]$.

7. Reihe der $\log \sin [+]$.

8. $\log \left(\frac{1}{\cos \varphi} \; \frac{1}{\cos \delta}\right)$ für jede Verticalreihe.

9. Reihe der $\log \sin^2 \frac{1}{2} \tau$ durch verticale Summation von 6., 7., 8.

10. Reihe der $\log \sin \frac{1}{2} \tau$ durch Halbiren der Glieder von 9.

11. Reihe der $\frac{1}{2} \tau^0$ mittels 10. und der Logarithmentafeln.

12. Reihe der τ^0 durch Verdoppelung der Glieder von 11.

13. Reihe der τ^h durch Bildung von $\frac{1}{15} \tau^0$ aus 12.

13a. Reihe der $-\tau^h$, falls der Stern im *Osten* lag.

14. $\alpha - \vartheta_0$ (mit dem zugehörigen Zeichen) unter jedes Glied von 13., bezw. 13a.

15. Reihe der $\pm \tau + \alpha - \vartheta_0$ aus 13. und 14., bezw. 13a. und 14.

16. Reihe der $(\pm \tau + \alpha - \vartheta_0)^0_{24} = t$.

17. Reihe der $t\delta\alpha$ aus 16. mittels der Tafel „Verwandlung von Sternzeit in mittlere Zeit“.

18. Reihe der $t_m = T = t - t\delta\alpha$ aus 16. und 17.

18a. Reihe der $t_m - 12^h = T$, falls die $t_m > 12^h$ sind.

19. Reihe der Uhrzeiten U aller berechneten Beobachtungen.

20. Reihe der Uhrcorrectionen $\Delta U = T - U$ aus 18., bezw. 18a. und aus 19.

239. Jede Beobachtung liefert ein positives ΔU, bezw. ein negatives $\overline{\Delta U}$. Wenn die Beobachtungen gut sind und unter günstigen Bedingungen angestellt werden konnten, so müssen die für K. R. abgeleiteten Resultate mit ihrem *Mittel* bis auf etwa 1^s übereinstimmen; analoges gilt für K. L. Die beiden Mittel, welche durch K. R. und K. L. geliefert werden, dürfen eine stärkere Abweichung von einander zeigen. Durch eine solche wird angedeutet, dafs der Indexfehler i des Höhenkreises seit der letzten Bestimmung kleine Aenderungen erfahren hat oder nicht genau genug bestimmt war.

Ueber das in Reihe 14 angeführte gemeinsame Glied $\alpha - \vartheta_0$, welches bei der Vorrechnung bestimmt wird, sei noch Folgendes bemerkt. α ist die Rectascension des Gestirns und ϑ_0 die Sternzeit im letzt verflossenen mittleren Mittag des Ortes. Es ist in Nr. 121. gezeigt worden, dafs $\vartheta_0 = \vartheta_{0,0} \pm \lambda \Delta \alpha$ ist, wo $\vartheta_{0,0}$ die im Nautischen Jahrbuch angegebene Sternzeit im mittleren Mittag von Greenwich bedeutet, $\pm \lambda^h$ die westliche, bezw. östliche Länge des Ortes und $\Delta \alpha$ die stündliche Veränderung der A. R. von S_m, d. h. 9^s86. Ein Fehler von 15^m in der angenommenen Länge würde also den Werth von ϑ_0 um 2^s46 fälschen (s. Nr. 241.).

240. Hat *statt eines Fixsternes die Sonne als Zeitgestirn* gedient (Beispiel Nr. 305.), so bleibt die Rechnung dieselbe bis zur Horizontalreihe 13., bezw. 13a., welche durch $t_{\odot} = \tau$, bezw. $= -\tau + 24^h$ ersetzt wird; hierin bedeutet $t_{\odot}$ die wahre Zeit, welche jeder Beobachtung entspricht. Man sucht nun die Zeitgleichung ω für die Mitte des Beobachtungsintervalls, erhält durch Addition von $t_{\odot}$ und

ω die mittleren astronomischen Zeiten, hieraus die mittleren bürgerlichen Zeiten und daraus die Uhrcorrection ΔU wie oben.

ω wird, wie schon früher (Nr. 120.) gezeigt, gefunden aus:

$$\omega = \omega_{0,0} \pm \lambda \delta \omega + t_\odot \delta \omega,$$

wo $\omega_{0,0}$ die aus dem Jahrbuch zu entnehmende Zeitgleichung im letzten mittleren Mittag von Greenwich bedeutet, $\pm \lambda$ ist die westliche, bezw. östliche Länge des Ortes, $\delta \omega$ die stündliche Veränderung von ω, und $t_\odot$ die wahre Zeit für den mittleren Zeitpunkt der Beobachtungen.

241. Es mufs allgemein festgehalten werden, dafs die Ephemeriden des Jahrbuchs (s. Nr. 285 ff.), d. h. die an bestimmte Zeitpunkte geknüpften Angaben, die Kenntnifs der Greenwicher Zeit verlangen, wenn die gesuchte Angabe richtig sein soll (Nr. 113.). Dazu gehört, aufser der Kenntnifs der Ortszeit, auch die Kenntnifs der geographischen Länge λ^h. Ein Fehler $\delta \lambda^h$ derselben fälscht den Werth der gesuchten Angabe a um $\delta \lambda^h \Delta a$, wenn Δa die *stündliche Veränderung* der letzteren bedeutet.

242. Will man z. B. die Declination der $\odot$ bestimmen zu einer Zeit, wo die stündliche Aenderung 59″ beträgt (März 24.), und ist die Länge des Beobachtungsortes um $10^m = \frac{1}{6}$ Stunde falsch, so beträgt der Fehler der aus dem Jahrbuch berechneten Declination $\left(\frac{59}{6}\right)'' = 9''8$; dieser Fehler bewirkt, dafs die Rechnung, in welcher δ auftritt, falsche Werthe für τ und $t_\odot$ liefert. In unserem Falle würde der Fehler in $t_\odot$ gegeben sein durch $\frac{1}{tg\, q \; cos\, \delta}\; 9''8$, wenn q den parallaktischen Winkel der $\odot$ für die Mitte der Beobachtungen bedeutet (Nr. 281. B.).

Es bewirkt aber ein gleich grofser Fehler in δ für *symmetrische* Beobachtungen am *Vormittag und Nachmittag*, dafs $t_\odot$, also auch ΔU, in dem einen Falle um etwa so viel zu grofs wird, wie in dem anderen zu klein. Beispielsweise werden die Fehler der Declination δ *gleich grofs*, wenn das δ der Nachmittagsbeobachtungen mittels der Zwischenzeit und der im Jahrbuch angegebenen stündlichen Veränderung $\Delta \delta$ aus dem δ der Vormittagsbeobachtungen abgeleitet wird.

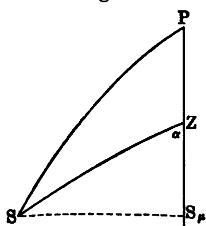
Wenn sich die $\odot$, ihrer veränderlichen Declination wegen,

weniger als Fixsterne zu Zeitbestimmungen eignet, so lassen sich andererseit Sonnenbeobachtungen mit großer Schärfe anstellen. Auch ist die Ausführung viel bequemer, weil sie in den hellen Tag fällt.

Im Besonderen eignet sich die ⊙ bei mehrtägigem Aufenthalte an demselben Orte zur Feststellung des *Uhrganges*. Denn die Fehler, mit denen die Uhrcorrectionen $\varDelta U_0$ und $\varDelta U$ behaftet sind, heben sich bei Beobachtungen zu derselben Tageszeit aus der Differenz $\varDelta U - \varDelta U_0$ weg; der Gang aber hängt nur von dieser Differenz ab (s. Nr. 224.).

243. Bei dieser Gelegenheit sei bemerkt, daſs Gangbestimmungen einer Uhr, nahezu ohne Berechnung, ausgeführt werden können, wenn man wiederholt Gelegenheit hat, das Verschwinden desselben Fixsternes hinter der verticalen Kante eines terrestrischen Gegenstandes zu beobachten. Die Punkte der Kante haben alle dasselbe Azimut a in Bezug auf den festen Standpunkt des Beobachters.

Fig. 80.



Dürfen Declination und Rectascension für einige Tage als constant betrachtet werden, so hat der Stern beim Verschwinden denselben Stundenwinkel, weil dann a, $\widehat{PS}$ und $\widehat{PZ}$ constant sind (Fig. 80). Zwischen zwei benachbarten Bedeckungen liegen also 24 Stunden Sternzeit $= (24^h - 3^m\,55^s\,9)$ M. Z. und $(24^h + U_2 - U_1)$ Uhrzeit, wenn U_1 und U_2 die Beobachtungszeiten der bürgerlichen Uhr sind. Demgemäſs ist Uhrgang γ^s während eines Sterntages gegeben durch:

$$\gamma^s = (24^h - 3^m\,55^s\,9) - (24^h + U_2 - U_1) = U_1 - U_2 - 3^m\,55^s\,9.$$

Wegen der Präcession ändern sich die Declination δ sowie die A. R. α eines jeden Sterns. Diese Aenderungen, auf den Tag bezogen, seien $\varDelta\delta''$ und $\varDelta\alpha^s$ und sollen nun berücksichtigt werden.

Der Einfluſs, welchen $\varDelta\delta$ auf die Veränderung $\varDelta t^s$ des Stundenwinkels hat, wenn das Azimut constant bleibt, läſst sich darstellen in der Form [s. Nr. 284. (C.)]:

$$\varDelta t^s = -\frac{tg\,q}{cos\,\delta}\,\frac{1}{15}\,\varDelta\delta'',$$

wo q den parallaktischen Winkel bedeutet. Da es wegen der

Kleinheit des $\varDelta\delta$ nicht auf ein genaues q ankommt, so kann man q aus [Nr. 162. (A.) 2.]

$$\sin q = \frac{\cos\varphi \sin a}{\cos\delta}$$

finden, indem man a mittels einer Bussole und der bekannten magnetischen Declination bestimmt.

War also t der Stundenwinkel des Sterns bei der ersten Bedeckung, so ist er $t + \varDelta t^s$ bei der folgenden; und die Zwischenzeit würde $(24^h + \varDelta t^s)$ St. Z. betragen, wenn keine A. R.-Aenderung vorhanden wäre; diese aber ist $\varDelta\alpha^s$, und deshalb verfließen $(24^h + \varDelta\alpha^s + \varDelta t^s)$ St. Z. innerhalb $(24^h + U_2 - U_1)$ Uhrstunden. Demgemäſs wird:

$$\gamma^s = U_1 - U_2 + \varDelta\alpha^s - \frac{tg q}{\cos\delta}\frac{1}{15}\varDelta\delta'' - 3^m 55^s 9.$$

Geht die Beobachtungsuhr Sternzeit statt bürgerlicher mittlerer Zeit, so entsteht γ^s durch Weglassen des Terms $- 3^m 55^s 9$.

Beobachtungen dieser Art können gleichzeitig als eine Vorübung für das Beobachten von Sternbedeckungen durch den Mond (statt durch den terrestrischen Gegenstand) gelten. In beiden Fällen kommt es darauf an, ein plötzliches Aufleuchten oder Verlöschen mit der Uhr aufzufassen.

Methode der Zeitbestimmung durch correspondirende, d. h. gleiche Zenitdistanzen desselben Gestirns in Ost und West.

244. Es sei S ein Gestirn, dessen Declination innerhalb eines Tages als constant angesehen werden darf. Sind S_1 und S_2 zwei Lagen, die eine im Osten, die andere im Westen, für welche das Gestirn *gleiche Zenitdistanzen* besitzt, so liegen die *zugeordneten Stundenkreise symmetrisch in Bezug auf den Meridian.*

Von den beiden sphärischen Winkeln, welche durch die Stundenkreise S_1 und S_2 bestimmt sind, wird der eine durch den oberen Meridian, der andere durch den unteren Meridian halbirt. Es fällt deshalb die obere, bezw. die untere Culmination des Sterns genau in die Mitte des Zeitintervalls, in welchem sein Stundenkreis den von dem oberen, bezw. dem unteren Meridian

halbirten Winkel beschreibt. Liegt S_1 im Osten, S_2 im Westen, und sind U_1 und U_2 die den beiden Lagen zugeordneten Uhrzeiten, so sind $u = U_2 - U_1$, bezw. $u = U_2 + 12^h - U_1$ Uhrstunden verflossen, wenn der Stundenkreis sich von S_1 nach S_2 gedreht hat. Es ist also $\left(U_1 + \frac{u}{2}\right)^0_{12} = U_0$ die *Uhrablesung der oberen Culmination.*

Allgemein gilt: sind U_1 und U_2 die Ablesungen einer bürgerlichen Uhr am Anfang und am Ende eines Zeitintervalls, so ist dasselbe $= (U_2 - U_1 + \varkappa . 12)$ Uhrstunden, wenn der Zeiger den Punkt XII $\varkappa$ mal passirt hat.

Hat der Stern die $AR\,\alpha$, so ist α die Sternzeit seiner oberen Culmination, also:

$$T = (\alpha - \vartheta_0)^0_{24}\,(1 - \delta\,\alpha)$$

die entsprechende mittlere astronomische Zeit. Hier bedeutet wie immer ϑ_0 die Sternzeit des letzten mittleren Ortsmittags und $1 - \delta\,\alpha$ den Verwandlungsfactor für Sternzeit in mittlere Zeit.

Aus T folgt die bürgerliche Zeit $(T)^0_{12}$ und aus

$$(T)^0_{12} - U_0 = \varDelta U$$

die Uhrcorrection, wenn die Uhr bürgerliche Zeit geht.

245. Liegt S_1 im Westen, S_2 im Osten, so fällt die Mitte der Zwischenzeit in den *unteren* Meridian. Sind U_1' und U_2' die Uhrzeiten, so wird daraus die *Uhrablesung* U_0' der *unteren Culmination* abgeleitet. Für diese ist $(\alpha + 12^h)^0_{24}$ die Sternzeit, wenn α die AR des Sternes ist, also:

$$T' = (\alpha + 12^h - \vartheta_0)^0_{24}\,(1 - \delta\,\alpha)$$

die mittlere Zeit und $(T')^0_{12}$ die bürgerliche Zeit. Es ist daher:

$$(T')^0_{12} - U_0' = \varDelta U'$$

die Uhrcorrection.

Diese Methode verliert an ihrer Einfachheit, wenn man die *Sonne als Gestirn* wählt. Denn für ☉ kann die Declination während eines Tages meist nicht als constant angesehen werden. Deshalb bedürfen die Uhrzeiten U_0, bezw. U_0' noch einer Correction, bevor sie die Uhrzeit der oberen, bezw. der unteren Culmination darstellen; diese Correctionen heifsen die *Mittags-* und die *Mitternachtsverbesserung.*

Die Mittagsverbesserung.

246. Es seien S_1 und S_2 zwei Lagen der $\odot$, in welchen die Zenitdistanzen einander gleich sind. S_1 liege im Osten, S_2 im Westen; auf dem Wege von S_1 nach S_2 soll die $\odot$ *einmal* durch den oberen Meridian treten.

Das Zeitintervall, in welchem der Stundenkreis $\odot$ sich von S_1 nach S_2 bewegt, sei $2t$ Sonnenstunden. Wir dürfen im Folgenden $2t = 2u$ mittlere Stunden setzen, wenn $2u$ die durch die Uhr gelieferte Dauer der Zwischenzeit ist. Es sei U_1, bezw. U_2 die Uhrzeit, wenn die $\odot$ in S_1, bezw. in S_2 steht; ferner sei U_0 die Uhrablesung für die Mitte der Zwischenzeit. $t = u$ und U_0 folgen aus U_1 und U_2, sind also bekannt (Nr. 244.).

Hätte die $\odot$ eine unveränderliche Declination, so würden die Stundenkreise S_1 und S_2 symmetrisch liegen zum Meridian. Der eine sphärische Winkel der beiden Halbkreise würde von dem oberen, der conjugirte andere von dem unteren Meridian halbirt werden. Weil die Declination der $\odot$ in S_1 einen *anderen* Werth hat als in S_2, während $\widehat{ZS_1} = \widehat{ZS_2}$ ist, so fällt der Meridian *nicht* zusammen mit dem Symmetriekreise der beiden Stundenkreise S_1 und S_2, sondern besitzt einen kleinen Abstand y^s (für die Secunde der Winkelstunde) von demselben. Derjenige Halbkreis des Symmetriekreises, welcher vom *oberen* Meridian den Abstand y^s hat, soll der *obere Symmetriekreis* heifsen; der Gegenhalbkreis, welcher vom *unteren* Meridian gleichfalls den Abstand y^s hat, soll der *untere Symmetriekreis* heifsen.

Wir haben also zwei Winkel y^s, deren jeder von dem Stundenkreise der Sonne in (δU) mittleren Secunden beschrieben wird. Weil (δU) auf die Einheit der mittleren Zeitstunde und y^s auf die Einheit der Winkelstunde bezogen ist, und weil der Stundenkreis der Sonne in einer Zeitstunde eine Winkelstunde beschreibt, so ist:

$$y^s = (\delta U);$$

kennt man also y^s, so kennt man (δU).

247. Bei seiner Drehung tritt der Stundenkreis $\odot$ entweder zuerst durch den oberen Meridian und dann durch den oberen Symmetriekreis oder umgekehrt. Ist U_0 die Uhrzeit, zu welcher

die ⊙ durch den oberen Symmetriekreis tritt, so ist im ersten Falle $U_0 - (\delta U^s)$, im zweiten Falle $U_0 + (\delta U^s)$ *die Uhrzeit der oberen Culmination* oder *des wahren Mittags.* Wird unter δU^s die Zahl verstanden, deren numerischer Betrag $(\delta U^s) = y^s$ ist, und deren Zeichen *positiv*, bezw. *negativ* ist, je nachdem der Durchtritt durch den oberen Meridian um (δU) Secunden *später*, bezw. *früher* erfolgt als der Durchtritt durch den oberen Symmetriekreis, so ist in *beiden* Fällen $U_0 + \delta U$ *die Uhrzeit des wahren Mittags.* Hierbei ist die für unseren Fall zulässige Approximation gemacht worden, dafs eine Sonnenstunde, eine mittlere Stunde, eine Uhrstunde als gleich gelten; denn wir nehmen an, dafs die Uhr mittlere Zeit geht.

248. Die Declination der ⊙ im wahren Mittag sei δ. Dann darf, ohne bemerkbare Fehler, $\delta - \Delta\delta$ als Declination von S_1 und $\delta + \Delta\delta$ als diejenige von S_2 genommen werden, wenn $2\Delta\delta$ die Aenderung der Declination in der Zwischenzeit bedeutet. Es ist also $\Delta\delta$ die Aenderung in t wahren und auch in t mittleren Sonnenstunden. $\Delta\delta$ ist eine positive oder negative Zahl, je nachdem die *Declination wächst oder fällt*, oder was dasselbe ist, je nachdem die ⊙ sich in der Zwischenzeit dem *Nordpol nähert* oder *sich von ihm entfernt.*

Fig. 81.

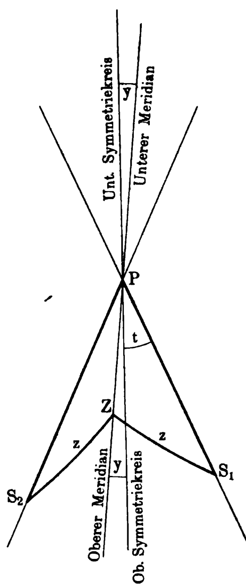
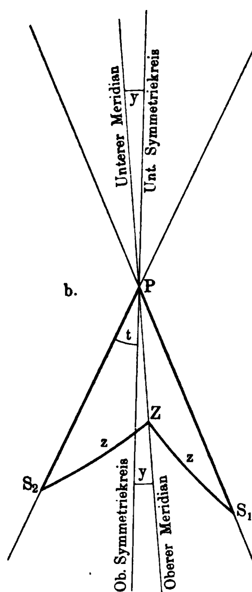


Fig. 82.



Je nachdem $\varphi - \delta$ positiv oder negativ, $\Delta\delta$ positiv oder negativ ist, erhalten wir vier Fälle 1., 2., 3., 4., welche durch die Zeichnungen (Fig. 81, 82, 83, 84) veranschaulicht sind und sämmtlich zu derselben Gleichung führen. Jede Zeichnung entspricht

einem der vier Fälle und stellt die beiden astronomischen Dreiecke der Sonne dar für die Lagen S_1 und S_2. Für Fig. 81 und 82 befindet sich das Auge über dem Nordpol P; für Fig. 83 und 84 in der Ebene des Aequators. Die Declination von S_1 ist stets $\delta - \Delta\delta$, die von S_2 ist $\delta + \Delta\delta$. Der $\angle P$ im Dreieck PZS_1 ist entweder $= t - y^s$ oder $= t + y^s$; alsdann ist der $\angle P$ im Dreieck PZS_2 die Ergänzung zu $2t$, also entweder $= t + y^s$ oder $= t - y^s$. Wir erhalten demgemäfs die vier Fälle:

Fig. 83.

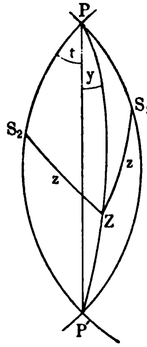
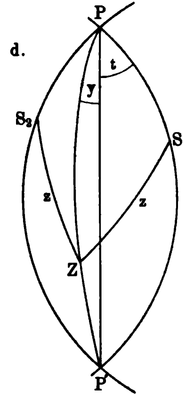


Fig. 84.



	$\varphi - \delta$	$\Delta\delta$	$\angle ZPS_1$	δU	$\angle ZPS_1$	$\angle ZPS_2$
1. . .	$+$	$-$	$t + y$	$+ y$	$t + \delta U$	$t - \delta U$
2. . .	$+$	$+$	$t - y$	$- y$	$t + \delta U$	$t - \delta U$
3. . .	$-$	$-$	$t - y$	$- y$	$t + \delta U$	$t - \delta U$
4. . .	$-$	$+$	$t + y$	$+ y$	$t + \delta U$	$t - \delta U$

Wenden wir in jedem der beiden Dreiecke den Cosinussatz an für Seite $\widehat{ZS_1}$, bezw. $\widehat{ZS_2}$ und berücksichtigen, dafs beide Zenitdistanzen einander gleich sind, so entsteht:

$$(A) \quad \sin\varphi \sin(\delta - \Delta\delta) + \cos\varphi \cos(\delta - \Delta\delta) \cos(t + \delta U)$$
$$= \sin\varphi \sin(\delta + \Delta\delta) + \cos\varphi \cos(\delta + \Delta\delta) \cos(t - \delta U)$$

oder nach Anwendung der schon oft benutzten Formeln:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta,$$

nach Weglassung der gleichen und entgegengesetzten Glieder und nach Division der Gleichung mit den Factoren von $\sin\delta U$:

$$\sin\delta U = \frac{tg\,\delta\; tg\,\Delta\delta}{tg\,t} \cos\delta U - \frac{tg\,\varphi\; tg\,\Delta\delta}{\sin t}.$$

Nun sind der Winkel $(\delta U)^s = (15\,\delta U)''$ und der Bogen $\Delta\delta''$ so klein, dafs gesetzt werden darf:

$$\sin\delta U = 15\,\delta U \sin 1'', \quad \cos\delta U = 1, \quad tg\,\Delta\delta'' = \Delta\delta'' \sin 1'';$$

dadurch entsteht, wenn die Glieder der rechten Seite umgesetzt werden:

$$15\,\delta U = -\frac{tg\,\varphi\,\varDelta\delta''}{sin\,t} + \frac{tg\,\delta\,\varDelta\delta''}{tg\,t}.$$

$\varDelta\delta''$ ist die Aenderung der Declination in t Stunden, und es sei μ das Analoge für diejenigen 48 Stunden, in deren Mitte die betrachtete obere Culmination der ⊙ (wahrer Mittag) liegt:

Alsdann ist:

$$\varDelta\delta'' = \frac{t}{48}\,\mu,$$

und da $15.48 = 720$ ist, so folgt:

$$\delta U = -\frac{t}{720\,sin\,t}\,\mu\,tg\,\varphi + \frac{t}{720\,tg\,t}\,\mu\,tg\,\delta$$

als die in Zeitsecunden ausgedrückte Correction, d. h. als *die Mittagsverbesserung.*

Für $A = \frac{t^h}{720\,sin\,t}$ und $B = \frac{t^h}{720\,tg\,t}$ gibt es Tafeln mit dem Argument „Halbe Zwischenzeit t“ (Albrecht, Tafel 24), so dafs δU ohne besondere Mühewaltung aus:

$$\delta U = -A\,\mu\,tg\,\varphi + B\,\mu\,tg\,\delta$$

gefunden wird. Hiermit bildet man nun $U_0 + \delta U^s$, d. h. die *Uhrzeit des wahren Mittags.* Ist ω die Zeitgleichung, so ist $12^h + \omega$ die *mittlere bürgerliche Zeit des wahren Mittags.*

Die *gesuchte Uhrcorrection* ist also:

$$\varDelta U = 12^h + \omega - (U_0 + \delta U).$$

Die Mitternachtsverbesserung.

249. Die Uhrcorrection $\varDelta U$ kann nun auch in der Weise bestimmt werden, dafs die *erste* Ablesung der Uhr bei einer Zenitdistanz z am *Nachmittag* stattfindet und die *nächste* bei derselben Zenitdistanz z an dem darauf *folgenden Vormittag*, so dafs die *untere* Culmination der ⊙ in der Zwischenzeit $2t'$ statt hat.

Für die Betrachtung dieses Falles können die Fig. 81, 82 dienen, wenn darin S_2 die *erste* und S_1 die *zweite* Lage der ⊙ bedeuten.

Aus der Zeitdauer $2t'$ (Einheit die Zeitstunde) folgt, dafs der sphärische Winkel, welchen der Stundenkreis der ⊙ bei seiner

Drehung aus Lage S_2 in Lage S_1 beschreibt, gleich $2t'$ Winkelstunden ist. Der Winkel $2t$ der Fig. 81 und 82 ist also der conjugirte Winkel von $2t'$, d. h. es ist $2t' + 2t = 24^h$ oder $t = 12^h - t'$.

Die Zwischenzeit $2t'$ wird durch die beiden Uhrablesungen geliefert; ebenso die Uhrablesung U'_0, welche in der Mitte der Zwischenzeit statt hat, d. h. in dem Augenblicke, wo die ⊙ durch den unteren Symmetriekreis tritt. Dies ist in Fig. 81 und 82 dargestellt. Ist $(\delta U')$ die Zeit, in welcher der Stundenkreis der ⊙ den Winkel zwischen dem unteren Meridian und unteren Symmetriekreis beschreibt, so ist $(\delta U') = y^s$, wenn y der Werth dieses Winkels ist. Setzen wir analog dem früheren $\delta U' = + y^s$, wenn die ⊙ den Symmetriehalbkreis *früher* als den unteren Meridian erreicht, und $\delta U' = - y^s$, wenn das Umgekehrte der Fall ist, so ist $\delta U'$ die Verbesserung in Zeitsecunden, welche zu U'_0 gefügt die Uhrablesung der wahren Mitternacht (untere Culmination) liefert. Die Declination für S_2 (erste Lage) ist $\delta - \Delta\delta$, die Declination für S_1 (zweite Lage) ist $\delta + \Delta\delta$, und wir erhalten für die beiden Winkel P der Dreiecke PZS_2 und PZS_1 folgende vier Fälle:

$\varphi - \delta$	$\Delta\delta$	$\angle ZPS_2$	$\delta U'$	$\angle ZPS_2$	$\angle ZPS_1$
1. . . +	+	$t - y$	$+ y$	$t - \delta U'$	$t + \delta U'$
2. . . +	—	$t + y$	$- y$	$t - \delta U'$	$t + \delta U'$
3. . . —	+	$t + y$	$- y$	$t - \delta U'$	$t + \delta U'$
4. . . —	—	$t - y$	$+ y$	$t - \delta U'$	$t + \delta U'$.

Wird wie vorher der Cosinussatz auf Seite $\widehat{ZS}_2$ und Seite $\widehat{ZS}_1$ angewandt, und berücksichtigt, dafs $\widehat{ZS}_2 = \widehat{ZS}_1$ ist, $t = 12^h - t'$ $\cos(t \mp \delta U') = - \cos(t' \pm \delta U')$, so entsteht die Gleichung:

$$\sin\varphi \sin(\delta - \Delta\delta) - \cos\varphi \cos(\delta - \Delta\delta) \cos(t' + \delta U')$$
$$= \sin\varphi \sin(\delta + \Delta\delta) - \cos\varphi \cos(\delta + \Delta\delta) \cos(t' - \delta U'),$$

welche sich von Gleichung (A) der Nr. 248 nur dadurch unterscheidet, dafs t' an Stelle von t, $- \cos\varphi$ an Stelle von $+ \cos\varphi$ steht; dividirt man beide Gleichungen durch $\cos\varphi$, so tritt, an Stelle von $tg\,\varphi$ in der ersten, $- tg\,\varphi$ in der zweiten.

Aus (A) folgte:

$$15\,\delta U = - \frac{tg\,\varphi\,\Delta\delta''}{\sin t} + \frac{tg\,\delta\,\Delta\delta''}{tg\,t},$$

also wird:

$$15 \delta U' = + \frac{tg\, \varphi\, \Delta\delta''}{\sin t'} + \frac{tg\, \delta\, \Delta\delta''}{tg\, t'}.$$

$\Delta\delta$ ist die Aenderung der Declination in t' Stunden. Bedeutet μ die Aenderung in den 48 Stunden, deren Mitte in die betrachtete Mitternacht fällt, so wird

$$\Delta\delta'' = \frac{t'}{48}\mu,$$

also gemäfs Nr. 248:

$$\delta U' = \frac{t'}{720 \sin t'}\mu\, tg\, \varphi + \frac{t'}{720\, tg\, t'}\mu\, tg\, \delta.$$

Auch dieser Ausdruck für $\delta U'$ läfst sich mittels der für

$$A = \frac{1}{720}\frac{t^h}{\sin t}, \qquad B = \frac{1}{720}\frac{t^h}{tg\, t}$$

gegebenen Tafel berechnen, wenn wiederum eingeführt wird:

$$t' = 12^h - t, \qquad t = 12^h - t'.$$

Dadurch entsteht zunächst:

$$\delta U' = \frac{t'}{720 \sin t}\mu\, tg\, \varphi - \frac{t'}{720\, tg\, t}\mu\, tg\, \delta,$$

oder wenn jedes Glied der rechten Seite mit $\frac{t}{t}$ multiplicirt wird:

$$\delta U' = \frac{12^h - t}{t}\,\frac{1}{720}\,\frac{t^h}{\sin t}\mu\, tg\, \varphi - \frac{12^h - t}{t}\,\frac{1}{720}\,\frac{t^h}{tg t}\mu\, tg\, \delta,$$

wo also t *das Supplement der halben Zwischenzeit* t' ist.

Für $f = \frac{12^h - t}{t}$ gibt es Tafeln (Albrecht, Taf. 25). Da in $\delta U'$ wiederum $A = \frac{t}{720 \sin t}$ und $B = \frac{t}{720\, tg\, t}$ auftreten, so wird die *Mitternachtsverbesserung* erhalten aus:

$$\delta U' = f A \mu\, tg\, \varphi - f B \mu\, tg\, \delta.$$

Demgemäfs ist $U'_0 + \delta U'$ die *Uhrzeit*, $12^h + \omega$ die *mittlere bürgerliche Zeit* der Mitternacht, also:

$$\Delta U = 12^h + \omega - (U'_0 + \delta U')$$

die *Uhrcorrection*.

250. Es ist nicht zu leugnen, dafs die Zeitbestimmung mittels Ablesung der Uhrzeiten bei gleichen Zenitdistanzen desselben Gestirns in Ost und West, bezw. in West und Ost der in Nr. 235. gegebenen Methode durch principielle Einfachheit

überlegen ist. Auch ist die Methode, nach welcher die Mittags- und Mitternachtsverbesserung für die Sonne abgeleitet wird — sie rührt von Gaufs her — ebenso elegant wie instructiv und verlangt rechnerisch keine nennenswerthe Arbeit, sobald man die Tafeln für $\frac{t}{720 \, sin \, t}$, $\frac{t}{720 \, tg \, t}$, $\frac{12^h - t}{t}$ zur Hand hat.

Trotzdem ist dem Reisenden die Methode der Nr. 235. mehr zu empfehlen; denn sie stellt an ihn geringere Anforderungen bezüglich seiner Zeit und seiner Beobachtungskunst und beschränkt die Gefahr eines Witterungsumschlages auf ein weit kürzeres Zeitintervall.

Hat man einen *Sextanten*, bezw. einen *Prismenkreis* zur Verfügung, so wird man auf die Methode der gleichen Höhen (statt der gleichen Zenitdistanzen) gröfseren Werth legen. Denn diese winkelmessenden Reflexionsinstrumente bedürfen keiner festen Aufstellung; man hält sie beim Beobachten in der Hand. Darauf beruht ihr unschätzbarer Werth für den Seefahrer.

Bestimmung der geographischen Breite oder Polhöhe durch Messung von Zenitdistanzen bei bekannter Zeit.

251. Die beste Methode zur Bestimmung der Polhöhe φ eines Ortes gründet sich auf die bereits abgeleiteten Beziehungen zwischen φ, der Declination δ eines Sternes und seiner Zenitdistanz ζ ($= \zeta_u$) für die *obere Culmination*, bezw. seiner Zenitdistanz ζ' ($= \zeta_v$) für die *untere Culmination.*

Die Formeln (Nr. 88., 93.) lauteten:

1. $\varphi = \delta \mp \zeta$, je nachdem der Stern im Norden oder im Süden des Zenits culminirt.

2. $(\varphi) = 180^0 - (\delta) - \zeta'$, wo (φ) und (δ) die numerischen Werthe von φ und δ bedeuten, und wo $\varphi \, \delta$ das Zeichen plus haben mufs.

In dieser Reinheit angewandt bietet die Methode der Culminationen den Nachtheil, dafs die Bestimmung von φ an eine *einzige* Messung, entweder von ζ oder von ζ', gebunden ist.

252. Die *Methode der Circummeridian-Zenitdistanzen* schafft den erwähnten Nachtheil fort, bewahrt aber den Vortheil des einfachen Princips. Sie verlangt, dafs man in der *Nähe* des

Meridians, *vor und nach der Culmination des Gestirns*, möglichst viele Zenitdistanzen desselben bei gleichzeitiger Ablesung der Uhr nimmt. Sie zeigt, wie sich aus jeder dieser Circummeridian-Zenitdistanzen z die Zenitdistanz ζ, bezw. ζ' der Culmination ableiten läfst. Man erhält dadurch ζ, bezw. ζ' als das *Mittel von Werthen, deren Anzahl gleich der Anzahl der Beobachtungen ist.* Vorausgesetzt wird, dafs man den Stand und Gang der Beobachtungsuhr kennt.

253. Zuerst soll die für die *obere Culmination* geltende Methode abgeleitet und gezeigt werden, wie sich die Differenz $z - \zeta = x''$ darstellen läfst, wenn der Abstand τ des Stundenkreises vom oberen Meridian innerhalb 30^m liegt. φ wird dabei zunächst als gegeben vorausgesetzt.

Aus

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\tau$$

hatten wir die Gleichung abgeleitet (Nr. 235.):

$$\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{1}{2}\tau = \sin\frac{1}{2}[z + (\varphi - \delta)] \sin\frac{1}{2}[z - (\varphi - \delta)],$$

welche durch Einführung von

$$\varphi - \delta = \mp \zeta \left(\text{Culmination} \begin{cases}\text{nördlich}\\ \text{südlich}\end{cases}\right)$$

überging in:

$$\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{1}{2}\tau = \sin\frac{1}{2}(z + \zeta) \sin\frac{1}{2}(z - \zeta).$$

Durch Einführung von $z - \zeta = x$ und $z = \zeta + x$ entsteht:

$$\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{1}{2}\tau = \sin\left(\zeta + \frac{1}{2}x\right) \sin\frac{1}{2}x,$$

oder wenn abkürzend gesetzt wird:

$$p = \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin\zeta}$$

1. $$p \sin\zeta \sin^2\frac{1}{2}\tau = \sin\left(\zeta + \frac{1}{2}x\right) \sin\frac{1}{2}x.$$

x nimmt ab mit τ, und beide Werthe werden gleichzeitig Null. τ soll nun so klein bleiben, dafs für x die Approximation erlaubt ist:

$$\sin\frac{1}{2}x'' = \frac{1}{2}x'' \sin 1'', \quad \cos\frac{1}{2}x'' = 1\ldots$$

Dadurch geht 1. über in:

2. $$p \sin\zeta \sin^2 \frac{1}{2}\tau = \sin\left(\zeta + \frac{1}{2}x''\right)\frac{1}{2}x'' \sin 1''.$$

Hieraus folgt ein Näherungswerth für x'', wenn gesetzt wird:

$$\sin\left(\zeta + \frac{1}{2}x''\right) = \sin\zeta\ldots,$$

nämlich:

$$x'' = p\,\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\tau}{\sin 1''}\ldots$$

Ferner liefert

$$\sin\left(\zeta + \frac{1}{2}x\right) = \sin\zeta\cos\frac{1}{2}x + \cos\zeta\sin\frac{1}{2}x$$

mittels der Approximationen

$$\sin\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x''\sin 1''\ldots,\quad \cos\frac{1}{2}x = 1\ldots$$

die Gleichung:

$$\sin\left(\zeta + \frac{1}{2}x\right) = \sin\zeta + \frac{1}{2}x''\sin 1''\cos\zeta,$$

oder weil

$$\frac{1}{2}x''\sin 1'' = p\sin^2\frac{1}{2}\tau$$

gefunden ist,

$$\sin\left(\zeta + \frac{1}{2}x\right) = \sin\zeta + p\sin^2\frac{1}{2}\tau\cos\zeta,$$

folglich:

3. $$\frac{\sin\left(\zeta + \frac{1}{2}x\right)}{\sin\zeta} = 1 + p\sin^2\frac{1}{2}\tau\, ctg\,\zeta.$$

Die Gleichung 2. läſst sich schreiben:

$$p\sin^2\frac{1}{2}\tau = \frac{1}{2}x''\sin 1''\sin\frac{\left(\zeta + \frac{1}{2}x\right)}{\sin\zeta}$$

und liefert mittels 3.:

$$p\sin^2\frac{1}{2}\tau = \frac{1}{2}x''\sin 1''\left(1 + p\sin^2\frac{1}{2}\tau\, ctg\,\zeta\right),$$

also:

$$x'' = p\,\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\tau}{\sin 1''}\;\frac{1}{1 + p\sin^2\frac{1}{2}\tau\, ctg\,\zeta}.$$

Der dritte Factor der rechten Seite hat die Form $\frac{1}{1+\mu}$, wofür man setzen darf $1 - \mu$, falls die höheren Potenzen von μ vernachlässigt werden können. Diese Eigenschaft soll $p\, sin^2 \frac{1}{2}\tau\ ctg\,\zeta$ vermöge der Kleinheit von τ besitzen, indem gleichzeitig Sterne, deren Zenitdistanz ζ sehr klein ist (also $ctg\,\zeta$ sehr grofs), von der Beobachtung ausgeschlossen sein sollen. Alsdann wird:

4. $$x'' = p\,\frac{2\, sin^2 \frac{1}{2}\tau}{sin\, 1''} - p^2\,\frac{2\, sin^4 \frac{1}{2}\tau}{sin\, 1''}\, ctg\,\zeta.$$

Dies ist die gesuchte Relation zwischen $x'' = z - \zeta$ und τ.

254. Ehe diese Gleichung praktisch verwerthet wird, soll ihr Analogon für *untere Circummeridian-Zenitdistanzen* abgeleitet werden.

Hierfür bildet die zweite Umformung von

$$cos\, z = sin\,\varphi\ sin\,\delta + cos\,\varphi\ cos\,\delta\ cos\,\tau$$

den Ausgangspunkt, nämlich die Gleichung (Nr. 236. e.):

$$cos\,\varphi\ cos\,\delta\ cos^2 \frac{1}{2}\tau = cos\frac{1}{2}\,[z + (\varphi + \delta)]\ cos\frac{1}{2}\,[z - (\varphi + \delta)].$$

Bedeutet τ den Abstand des Stern-Stundenkreises vom oberen Meridian und τ' das *Analoge* in Bezug auf den *unteren Meridian*, so ist $\tau + \tau' = 12^h$. In der Nähe des unteren Meridians ist τ' also ein kleiner Winkel. Es wird:

$$cos\frac{1}{2}\tau = cos\frac{1}{2}\,(12^h - \tau') = sin\frac{1}{2}\tau'.$$

Da φ und δ bei einer sichtbaren unteren Culmination stets dasselbe Zeichen haben, so bleibt die rechte Seite der Ausgangsgleichung unverändert, wenn an Stelle von φ und δ ihre numerischen Werthe (φ) und (δ) gesetzt werden; nun besteht für die untere Culmination die Gleichung:

$$(\varphi) + (\delta) + \zeta' = 180^0,$$

also wird:

$$cos\frac{1}{2}\,[z + (\varphi) + (\delta)] = cos\frac{1}{2}\,(z + 180^0 - \zeta') = sin\frac{1}{2}\,(\zeta' - z),$$

$$cos\frac{1}{2}\,[z - (\varphi) - (\delta)] = cos\frac{1}{2}\,(z - 180^0 + \zeta') = sin\frac{1}{2}\,(\zeta' + z).$$

Die Ausgangsgleichung geht dadurch über in:

$$\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{1}{2}\tau' = \sin\frac{1}{2}(\zeta' - z)\sin\frac{1}{2}(\zeta' + z).$$

Wird eingeführt:

$$\zeta' - z = y'', \text{ also } z = \zeta' - y'', \quad \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\zeta'} = p',$$

so ergibt sich:

1. $$p' \sin\zeta' \sin^2\frac{1}{2}\tau' = \sin\left(\zeta' - \frac{1}{2}y\right)\sin\frac{1}{2}y.$$

y nimmt ab mit τ' und beide Werthe werden gleichzeitig Null. τ' soll nun so klein bleiben, dafs für y die Approximation erlaubt ist:

$$\sin\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y'' \sin 1'' \ldots, \qquad \cos\frac{1}{2}y = 1\ldots$$

Schreiben wir die Gleichung 1. vorübergehend:

$$(-p')\sin\zeta' \sin^2\frac{1}{2}\tau' = \sin\left(\zeta' - \frac{1}{2}y\right)\sin\left(-\frac{1}{2}y\right),$$

um sie zu vergleichen mit (Nr. 253., 1.):

$$p \sin\zeta \sin^2\frac{1}{2}\tau = \sin\left(\zeta + \frac{1}{2}x\right)\sin\frac{1}{2}x,$$

so ist evident, dafs die erste aus der zweiten entsteht, wenn in dieser für p, ζ, τ, x, bezw. gesetzt wird $-p'$, ζ', τ', $-y$.

Nun ist Gleichung 4. (Nr. 253.) eine Folge von Gleichung 1. (Nr. 253.); wenn also in 4. für p, ζ, τ, x die angegebene Substitution gemacht wird, so entsteht eine neue richtige Gleichung, welche nach Umkehr der Zeichen lautet:

2. $$y'' = p' \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\tau'}{\sin 1''} + p'^2 \frac{2\sin^4\frac{1}{2}\tau'}{\sin 1''} ctg\,\zeta'.$$

255. Ist z eine Circummeridian-Zenitdistanz für den oberen Meridian, so ist:

$$\zeta = z - x,$$

und

$$-x'' = -p\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\tau}{\sin 1''} + p^2\frac{2\sin^4\frac{1}{2}\tau}{\sin 1''} ctg\,\zeta;$$

deshalb heifst $-x''$ die *Reduction der Circummeridian-Zenitdistanz* z auf den *oberen Meridian*, und wenn z' und $+y''$ das Analoge in Bezug auf den unteren Meridian bedeuten, so ist:

$$\zeta' = z' + y'';$$

deshalb heifst das in 2. der Nr. 254. gegebene y'' die *Reduction der Circummeridian-Zenitdistanz* z' auf den *unteren Meridian.*

Messung der circummeridianen Zenitdistanzen zur Bestimmung der geographischen Breite.

256. Bei der *Anstellung der Beobachtungen* soll man sich womöglich so einrichten, dafs *gleich viele* Zenitdistanzen auf *beiden* Seiten des Meridians genommen werden. Handelt es sich um den oberen Meridian, so mufs beim Beginn der Beobachtungen der Stern im Fernrohr (ohne Ocularprisma) noch bemerkbar fallen, allmählich weniger und weniger, bis er für kurze Zeit, deren Mitte die Passage ist, horizontal läuft, um dann allmählich anzusteigen und von unten nach oben durch die Horizontalfäden zu treten.

Es ist gut, 15 Minuten vor der Passage schlagbereit für das Beobachten zu sein und dann ohne Unterbrechung, emsig aber besonnen, so viele Zenitdistanzen zu nehmen, wie für beide Lagen des Instrumentes (K. R. und K. L.) erhalten werden können. Man versäume nicht, das Thermometer und Barometer vorher und nachher abzulesen, damit die Refraction möglichst genau erhalten werde. Denn der Fehler in der Refraction geht mit seinem vollen Betrage in ζ ein, also auch in $\varphi = \delta \pm \zeta$.

Aus diesem Grunde beobachtet man zur Ableitung der Polhöhe, wenn es irgend möglich ist, *zwei* Sterne, von denen der eine *im Norden*, der andere *im Süden des Zenits* culminirt. Sind δ_n die Declination, ζ_n die Meridian-Zenitdistanz des nördlichen Sterns, δ_s und ζ_s die entsprechenden Werthe des südlichen Sterns, so liefert das Mittel aus $\varphi = \delta_n - \zeta_n$ und $\varphi = \delta_s + \zeta_s$:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\delta_n + \delta_s) + \frac{1}{2}(\zeta_s - \zeta_n).$$

Es werden sich also die *constanten* Fehler aus $\zeta_s - \zeta_n$ wegheben.

257. Will man einen Stern α, δ um die Zeit seiner oberen Culmination (Stundenwinkel $t = 0$) beobachten, und geht die

Beobachtungsuhr mittlere Zeit, so mufs man die mittlere Zeit t_m des Durchtritts kennen. Aus

$$t_m = (t + \alpha - \vartheta_0)^{0}_{24} \, (1 - \delta\alpha)$$

in Nr. 117. folgt für $t = 0$:

$$t_m = (\alpha - \vartheta_0)^{0}_{24} \, (1 - \delta\alpha) = (\alpha - \vartheta_0)^{0}_{24} - (\alpha - \vartheta_0)^{0}_{24} \; 9^s83,$$

wenn ϑ_0 die Sternzeit für den letzten Ortsmittag ist. Man mufs auch den genäherten Werth $\varphi \sim \delta$ der Meridian-Zenitdistanz kennen, um zu entscheiden, ob sich der Stern zur Beobachtung eignet.

Wünscht man innerhalb bestimmter Stunden, z. B. zwischen 9^h und 11^h N. zu beobachten, so mufs man die Sternzeit ϑ für 9^h M. Z. bilden, d. h. $\vartheta = \vartheta_0 + 9^h + 9 \cdot 9^s86$. Es mufs dann im Jahrbuch nachgesehen werden, ob es Sterne gibt, für welche $\vartheta < \alpha < \vartheta + 2^h$ $\vartheta^h + 2^h$ ist, und für welche $\varphi \sim \delta$ etwa zwischen 30^0 und 70^0 liegt.

Berechnung der Polhöhe aus circummeridianen Zenitdistanzen.

258. Handelt es sich nun um die *Berechnung* von Fixsternbeobachtungen, so leitet man zunächst die Zenitdistanzen aus den Ablesungen ab, genau so, wie dies für Zeitbestimmungen gezeigt wurde. Man erhält dadurch eine Reihe von Zenitdistanzen z', welche der Zeitfolge nach zunächst *abnehmen* bis zu einem kleinsten Werthe ζ_0' und von da an *wieder wachsen.* Nun wird $\zeta_0 = \zeta_0' + re$ gebildet. Der *Werth* ζ_0 *entspricht alsdann einer Beobachtung, welche in gröfster Nähe des Meridians gemacht ist, so dafs* ζ_0 *sich sehr wenig von* ζ *unterscheidet.* Mit ζ_0 bildet man einen Näherungswerth φ_0 der geographischen Breite φ, indem man setzt: $\varphi_0 = \delta \pm \zeta_0$, je nachdem der Stern im Süden oder im Norden culminirt hat. Ferner setzt man für p den Näherungswerth $p_0 = \frac{\cos\varphi_0 \cos\delta}{\sin\zeta_0}$.

a. *Fixsternbeobachtungen* (Beispiel Nr. 306.).

259. Die Berechnung von τ für jede Beobachtung eines Fixsternes von der A. R. α geschieht (Nr. 117. Ende) mittels:

$$t = [\vartheta_0 - \alpha + t_m (1 + \Delta\alpha)]^{0}_{24};$$

man setzt $\tau = 24^h - t$, wenn t nahe bei 24^h, und $\tau = t$, wenn t nahe bei 0^h liegt. t_m ist die aus der Uhr abgeleitete astronomische

mittlere Zeit, ϑ_0 die Sternzeit im letzten mittleren Ortsmittag, $(1 + \varDelta\alpha)$ der Umwandlungsfactor $\frac{366,2422}{365,2422}$ der mittleren Zeit in Sternzeit, τ ist der Abstand des Sternstundenkreises vom oberen Meridian. Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck wird numerisch wenig von 24^h oder wenig von 0^h verschieden sein, weil alle in Betracht kommenden Stundenkreise des Sternes in der Nähe des oberen Meridians liegen. Die für *alle* Beobachtungen gebrauchten Zahlen werden, wie früher, durch die *Vorrechnung* geliefert. Dieselbe verlangt:

1. Entnahme von α und δ des Sternes aus dem Jahrbuch.

2. Entnahme der Sternzeit $\vartheta_{0,0}$ des mittleren Mittags von Greenwich und Bildung von $\vartheta_0 = \vartheta_{0,0} \pm \lambda^h \varDelta\alpha$, wo $\pm\lambda^h$ die westliche, bezw. östliche Länge des Ortes und $\varDelta\alpha = 9^s86$ ist.

3. Bildung von $\vartheta_0 - \alpha$ mit dem Vorzeichen.

4. Entnahme von ζ_0 aus den beobachteten Zenitdistanzen; Bildung von $\zeta_0 = \zeta_0' + re$ und $\varphi_0 = \delta \pm \zeta_0$, je nachdem der Stern im Süden oder Norden culminirte.

5. Bildung von $log\, p_0 = log\, \frac{cos\, \varphi_0\; cos\, \delta}{sin\, \zeta_0}$.

6. Bildung der Uhrcorrection $\varDelta U$ aus der zuletzt bestimmten Correction $\varDelta U_0$, der inzwischen verflossenen Zeit und dem Gange der Beobachtungsuhr.

Damit ist die Vorrechnung geschlossen.

260. Nun folgt das *gleichzeitige Berechnen der Meridianreductionen* für alle genommenen Zenitdistanzen. Dasselbe besteht in Bildung folgender, vertical gegliederten Horizontalreihen.

1. Hinschreiben der Stellenzahlen 1, 2, 3, ... jeder Beobachtung unter Hinzufügen von K. R., bezw. K. L., je nach der Lage, in welcher die Beobachtung angestellt wurde.

2. Hinschreiben der bürgerlichen Uhrzeiten U_1, U_2, ...

3. Hinschreiben der gemeinsamen Uhrcorrection $\varDelta U$, bezw. $\varDelta U + 12^h$ für Vormittag. (Im Beispiel mit 2. zu 4. combinirt.)

4. Bildung der Reihe t_m durch Addition von 2. und 3.

5. Bildung der Reihe $t_m \varDelta\alpha = t_m\, 9^s86$ (Albrecht, Tafel 14 und Nautisches Jahrbuch, Tafel 3).

6. Hinschreiben von $\vartheta_0 - \alpha$ mit dem Vorzeichen.

7. Addition von 4., 5., 6 (Reihe t des Beispiels).
8. Bildung von τ

entweder durch Weglassen der Vorzeichen in 7., wenn die Werthe in 7. numerisch nahe bei 0 liegen,

oder durch Bildung der positiven Differenz mit 24^h, wenn die Werthe in 7. numerisch nahe bei 24^h liegen.

9. Hinschreiben von $log \dfrac{2\, sin^2 \frac{1}{2}\tau}{sin\, 1''}$ (Tafel I dieses Buches) für jedes τ.
10. Hinschreiben von $log\, p_0$ der Vorrechnung.
11. Bildung von $log\, x''$ durch Addition von 9. und 10.
12. Aufsuchen der Numeri x''.
13. Hinschreiben der beobachteten Zenitdistanzen z'.
14. Bildung der $\zeta' = z' - x''$ aus 13. und 12.
15. Bildung des Mittels ζ'_μ der ζ'.
16. Bildung von $\zeta'_\mu + re = \zeta$.
17. Bildung von $\varphi = \delta \pm \zeta$.

Im Vorstehenden ist das Glied $p^2 \dfrac{2\, sin^4 \frac{1}{2}\tau}{sin\, 1''}\, ctg\, \zeta_0 = q$ bei der Berechnung von x'' unberücksichtigt geblieben, was bei kleinem τ und grofsem ζ_0 stets erlaubt ist. Da man p bereits kennt und da es Tafeln für $\dfrac{2\, sin^4 \frac{1}{2}\tau}{sin\, 1''}$ (Tafel II dieses Buches) gibt, so verursacht die Berücksichtigung von q nur geringen Rechnungsaufwand.

b. Sonnenbeobachtungen (Beispiel Nr. 304.).

261. Die Rechnung gestaltet sich theilweise anders, wenn nicht ein Fixstern, sondern die ⊙ das Beobachtungsgestirn ist. Es sind dabei folgende Operationen auszuführen.

Vorrechnung:

1. Entnahme der Zeitgleichung $\omega_{0,0}$ für den mittleren Mittag von Greenwich aus dem Nautischen Jahrbuch.

2. Bildung von $\omega_0 = \omega_{0,0} \pm \lambda^h \delta\omega$, wenn $\delta\omega$ die im Jahrbuch angegebene, mit dem richtigen Vorzeichen zu versehende stündliche Aenderung der Zeitgleichung ist.

3. Bildung von $\delta U = \varDelta U - \omega_0$ = Uhrcorrection für bürgerliche wahre Zeit.

4. Entnahme der Declination δ_0 für den *wahren* Mittag von Greenwich aus dem Jahrbuch. Bildung von $\delta = \delta_0 \pm \lambda^h \varDelta \delta$, wenn $\pm \lambda^h$ die westliche, bezw. östliche Länge in der Stundeneinheit ist und $\varDelta \delta$ die dem Jahrbuch entnommene, mit dem richtigen Zeichen versehene, stündliche Aenderung von δ.

5. Bestimmung der kleinsten aus den Beobachtungen abgeleiteten Zenitdistanz ζ_0', der Refraction re, der Parallaxe pa und des additiv oder subtractiv anzubringenden Halbmessers ha. Bildung von $\zeta_0 = \zeta_0' + re - pa \pm ha$.

6. Bildung von $\varphi_0 = \delta \pm \zeta_0$.

7. Bildung von $\log p_0 = \log \dfrac{\cos \varphi_0 \cos \delta}{\sin \zeta_0}$.

262. *Berechnung:*

1. Hinschreiben der Stellenzahlen der Beobachtungen und Angabe, ob die Beobachtung bei K. R. oder K. L. stattfand.

2. Hinschreiben der Uhrzeiten U_1, U_2, ...

3. Hinschreiben der Uhrcorrection δU gegen wahre Zeit.

4. Bildung der bürgerlichen $t_\odot$ aus 2. und 3.

5. Bildung von $\tau = 12^h - t_\odot$, wenn $\odot$ im Osten, von $\tau = t_\odot$, wenn $\odot$ im Westen stand.

6. Berechnung von x'' aus τ wie früher (Nr. 260., 9 bis 12).

7. Hinschreiben der beobachteten z'.

8. Bildung der $z' - x'' = \zeta'$.

9. Hinschreiben von $re - pa \pm ha$ unter jedes ζ'.

10. Bildung der ζ durch Addition von 8. und 9.

11. Bildung von $\mp \tau^h \varDelta \delta''$ für jede Beobachtung, je nachdem der Stundenwinkel östlich oder westlich ist.

12. Hinschreiben von δ (Vorrechnung Nr. 4.).

13. Addition von 11. und 12. unter Berücksichtigung der Vorzeichen von δ und $\varDelta \delta$, wodurch δ der *Beobachtung* entsteht.

14. Bildung von $\varphi = \delta \pm \zeta$ aus jeder Beobachtung.

15. Bildung des Mittels φ aus den Werthen von 14.

In dem Beispiel Nr. 304. ist die Declination der Sonne constant genommen.

Bestimmung der Zeit und der Polhöhe, wenn beide unbekannt sind.

263. Eine der Hauptaufgaben, welche dem Reisenden zufällt, besteht darin, während *derselben* Nacht diejenigen Beobachtungen anzustellen, aus denen sich *sowohl die Uhrcorrection wie auch die geographische Breite* herleiten läfst. Durch die oben auseinandergesetzten Methoden ist diese Aufgabe im Princip bereits gelöst. Das Verfahren ist folgendes.

Es werden, wenn irgend möglich, vier Sätze von Zenitdistanzbeobachtungen gemacht: je ein Satz im *Westen* und im *Osten* für *Zeit*, und je ein Satz im *Norden* und im *Süden* des Zenits für *Polhöhe.*

Da man auf einer Forschungsreise allmählich von bekannten zu unbekannten Orten fortschreitet, so wird der Beobachter die Zeit stets genähert kennen, also im Stande sein, die Uhrzeit einer Culmination annähernd aus $t_m = (\alpha - \vartheta_0)^0_{24}\ (1 - \delta a)$ zu berechnen. Die Gestirne für die Beobachtung im Osten und Westen ergeben sich leicht aus dem Anblick des Himmels; sie sollen *Zeitgestirne* heifsen und diejenigen, welche in der Nähe des Meridians beobachtet werden, sollen *Polhöhegestirne* heifsen.

In welcher Reihenfolge die vier Gestirne beobachtet werden, das hängt von ihrer Rectascension ab, und es ist stillschweigend vorausgesetzt, dafs ihre Zenitdistanzen weder zu grofs noch zu klein sind. Am besten hat man sich eingerichtet, wenn die Beobachtungen der beiden Zeitgestirne in den Anfang und das Ende der Beobachtungszeit fallen.

Man beachtet peinlich alle Regeln in Bezug auf das Ablesen von Thermometer und Barometer, in Bezug auf das Vergleichen der Uhren, das Ablesen beider Mikroskope bei jeder Einstellung und das Ablesen des Höhenniveaus vor und nach jeder Ablesung des Höhenkreises; auch sei man stets darauf bedacht, ein Anstofsen an das Stativ zu vermeiden.

Von jedem Stern nimmt man sechs bis zwölf Zenitdistanzen in beiden Lagen, hat also im Ganzen vier Sätze von Beobachtungen. Oft mufs man sich freilich mit nur einem Polhöhestern und nur einem Zeitstern begnügen.

264. Vor der Berechnung leitet man zunächst sämmtliche Zenitdistanzen aus den Ablesungen ab, wie dies früher gezeigt wurde, und berechnet mittels der *kleinsten* Zenitdistanz ζ_s, bezw. ζ_n des Südsterns, bezw. des Nordsterns die genäherte Polhöhe φ_0 aus

$$\varphi_0 = \delta_s + \zeta_s \quad \text{und} \quad \varphi_0 = \delta_n - \zeta_n,$$

wo δ_s, bezw. δ_n die Declination des Südsterns, bezw. des Nordsterns bedeutet. Mit diesem Werthe von φ_0 wird nun die Uhrcorrection sowohl aus den Beobachtungen des Oststerns wie aus denen des Weststerns berechnet; aus beiden Resultaten wird das Mittel genommen; ΔU gilt dann streng genommen für das *Mittel* der abgelesenen Uhrzeiten.

Mittels ΔU berechnet man nun, wie früher gezeigt wurde, die beiden Sätze der circummeridianen Beobachtungen und erhält aus jedem Satz einen Werth der Polhöhe; das Mittel beider ist dann φ.

Auch wenn φ von dem φ_0 abweicht, mit welchem die Uhrcorrectionen berechnet wurden, so hat das nichts zu sagen, falls die Verticalkreise der beiden beobachteten Zeitsterne ungefähr symmetrisch zum Meridian lagen. Ist aber nur *ein* Zeitstern beobachtet und ist t sein Stundenwinkel, a sein Azimut, z seine Zenitdistanz für die Mitte des Satzes, so verbessert man ΔU um $-\frac{1}{tg\,a\,cos\,\varphi}(\varphi - \varphi_0)$ [Nr. 281. (A.)], wo a gegeben ist durch $sin\,a = \frac{sin\,t\ \ cos\,\delta}{sin\,z}$; oder man berechnet t aus z mit dem neuen φ und verbessert ΔU entsprechend der Abweichung, welche der neu berechnete Stundenwinkel von dem zuerst berechneten zeigt.

Indessen mufs bei dieser Gelegenheit ausgesprochen werden, dafs man sich bei dem Streben nach höchster Genauigkeit stets die Frage vorlegen soll, ob es sich lohnt, die dafür erforderliche Arbeit — des Beobachtens wie des Berechnens — aufzuwenden. Durch diese Frage soll der Lässigkeit nicht Vorschub geleistet werden, wohl aber der Kräfteökonomie, welche sich der Reisende zur Pflicht machen mufs, wenn er leistungsfähig bleiben will.

Bestimmung des Indexfehlers für den Azimutalkreis eines aufgestellten Universalinstrumentes durch astronomische Beobachtungen.

265. Es sind in Nr. 212. bis 215. die Beziehungen gegeben worden, welche zwischen dem Azimut eines eingestellten entfernten Objects, dem Indexfehler des Azimutalkreises und der Ablesung bei K. R. wie bei K. L. bestehen.

War A_r die Ablesung bei K. R., so wurde

$$A'_r = (A_r - c \operatorname{cosec} z - b_r \operatorname{ctg} z)^0_{360}$$

als die *verbesserte Ablesung bei K. R.* bezeichnet.

War A_l die Ablesung bei K. L., so wurde zunächst die Zahl $A_l - 180^0$ (wenn $A_l > 180^0$), bezw. $A_l + 180^0$ (wenn $A_l < 180^0$) gebildet und als *Ablesung B_l bei K. L.* bezeichnet; hieraus entstand:

$$B'_l = (B_l + c \operatorname{cosec} z + b_l \operatorname{ctg} z)^0_{360}$$

als die *verbesserte Ablesung bei K. L.*

Bezeichnete a das Azimut und ΔA den Indexfehler, so war:

$$\text{K. R.} \qquad a = (A'_r + \Delta A)^0_{360}$$
$$\text{K. L.} \qquad a = (B'_l + \Delta A)^0_{360},$$

und zwar darf ΔA hierin sowohl den positiven wie den negativen Indexfehler bedeuten.

266. Schreibt man die Gleichungen

$$a = (A'_r + \Delta A)^0_{360}, \qquad a = (B'_l + \Delta A)^0_{360}$$

in der Form:

$$\Delta A = a - A'_r, \qquad \Delta A = a - B'_l,$$

so liefern dieselben das Mittel, ΔA durch astronomische Beobachtung zu finden. Dies geschieht dadurch, dafs *ein Gestirn bei einspielendem Reiterniveau auf die Mitte des Verticalfadens eingestellt und die Uhrablesung der Beobachtung genommen wird. Danach liest man die Kreise und beide Niveaus ab.* Es wird angenommen, dafs die *Uhrcorrection bekannt* ist, dafs also aus der Uhrablesung zunächst die mittlere bürgerliche, dann die mittlere astronomische Zeit abgeleitet werden kann und aus letzterer der Stundenwinkel t des Gestirns.

Mittels t läfst sich dann das Azimut a aus den in Nr. 215. gegebenen Gleichungen finden. Die beiden letzten lauteten:

$$(E)\quad \begin{cases} tg\,\frac{1}{2}(a-q) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\delta)}\,tg\,\frac{1}{2}\,t \\[2ex] tg\,\frac{1}{2}(a+q) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\delta)}\,tg\,\frac{1}{2}\,t. \end{cases}$$

Steht das Gestirn im *Westen*, so sind a, q, t *Concavwinkel*, folglich ist $\frac{1}{2}(a-q)$, bezw. $\frac{1}{2}(q-a)$ ein Winkel des 1. Quadranten, wenn die rechte Seite der ersten Gleichung positiv, bezw. negativ ist, und $\frac{1}{2}(a+q)$ ist ein Winkel des 1., bezw. 2. Quadranten, je nachdem die rechte Seite der zweiten Gleichung positiv oder negativ ist. Es ergeben sich also die Werthe von $\frac{1}{2}(a-q)$ und $\frac{1}{2}(a+q)$ eindeutig und daraus auch a und q eindeutig.

Steht das Gestirn im *Osten*, so sind a, q, t *Convexwinkel*, ihre conjugirten Winkel $\alpha' = 360^0 - a$, $\varkappa = 360^0 - q$, $\tau = 360^0 - t$ sind also Concavwinkel. Da jede Gleichung, welche für ein sphärisches Grunddreieck gilt, auch für das conjugirte Dreieck (Nr. 152.) gilt, so darf man in den Gleichungen (E) α', $\varkappa$, τ an Stelle von a, q, t setzen. Man erhält alsdann α' und $\varkappa$ eindeutig und daraus $a = 360^0 - \alpha'$, $q = 360^0 - \varkappa$.

Die Gleichungen (E) sind sehr geeignet zur *gleichzeitigen* Berechnung von *Einzelbeobachtungen*, welche einen *Satz* bilden. Denn die Ausdrücke für $tg\,\frac{1}{2}(a-q)$ und $tg\,\frac{1}{2}(a+q)$ unterscheiden sich für die einzelnen Beobachtungen nur durch den Factor $tg\,\frac{1}{2}\,t$, dessen Werth für eine jede ein anderer wird.

267. Zur Ermittelung von ΔA soll ein Gestirn bei Zenitdistanzen von etwa 60^0 bis 70^0 in ununterbrochener Folge bei

K. R., K. L., K. L., K. R. u. s. w. beobachtet werden, wie im Anfang von Nr. 266. verlangt wurde. Bezeichnen wir die Beobachtungen mit 1, 2, 3 ... i ..., so soll für die Beobachtung i der Stundenwinkel t des Gestirns mit t_i, sein Azimut mit a_i, seine Zenitdistanz mit z_i bezeichnet werden. Wird die Beobachtung i bei K. R., bezw. K. L. angestellt, so soll $A_{r,i}$, bezw. $B_{l,i}$ die Ablesung des Azimutalkreises bedeuten.

Die Neigung b des k-Strahles soll für $A_{r,i}$ mit $b_{r,i}$, für $B_{l,i}$ mit $b_{l,i}$ bezeichnet werden. Unter $A'_{r,i}$, bezw. $B'_{l,i}$ wird die verbesserte Ablesung von $A_{r,i}$, bezw. $B_{l,i}$ verstanden.

Alsdann liefert jede Beobachtung einen Werth für $\varDelta A$ in der Folge:

1. K. R. $\varDelta A = a_1 - A'_{r,1}$
2. K. L. $\varDelta A = a_2 - B'_{l,2}$
3. K. L. $\varDelta A = a_3 - B'_{l,3}$
4. K. R. $\varDelta A = a_4 - A'_{r,4}$

. . . .

$\varDelta A$ wird so oft erhalten, wie Beobachtungen vorliegen, und es läfst sich zeigen, dafs das Mittel nahezu frei von den Einflüssen der Fehler c und b wird, wenn gleichmäfsig bei K. R. und K. L. in der oben gegebenen Anordnung beobachtet worden ist.

Hierfür genügt es, die den Beobachtungen 1. und 2. zugeordneten Gleichungen

$$A'_{r,1} = A_{r,1} - c \operatorname{cosec} z_1 - b_{r,1} \operatorname{ctg} z_1$$
$$B'_{l,2} = B_{l,2} + c \operatorname{cosec} z_2 + b_{l,2} \operatorname{ctg} z_2$$

zu betrachten. Die Zeitpunkte, auf welche sich dieselben beziehen, sind um wenige Minuten getrennt; deshalb sind z_1 und z_2 nicht sehr verschieden von einander und $c\,(\operatorname{cosec} z_2 - \operatorname{cosec} z_1)$ wird so klein werden, dafs es für die Zwecke terrestrischer Azimutbestimmungen vernachlässigt werden darf.

Da auch a_1 und a_2 nicht sehr verschieden von einander sind, so wird die Axe II. annähernd eine 180°-Drehung erfahren, wenn man aus K. R. der ersten Beobachtung zu K. L. der zweiten übergeht. Deshalb wird, wenn Axe I. vertical steht oder wenn ihr Aufstellungsfehler i durch sorgfältiges Nivelliren sehr klein gemacht worden ist, die Neigung b des Strahles k in beiden Fällen nahezu *dieselbe*, also $b_{r,1} = b_{l,2} \ldots$ sein. Aus diesem Grunde darf auch $b_{l,2} \operatorname{ctg} z_2 - b_{r,1} \operatorname{ctg} z_1$ vernachlässigt werden.

Demgemäfs dürfen wir setzen:

$$A'_{r,1} + B'_{l,2} = A_{r,1} + B_{l,2} \ldots,$$

und nun folgt aus

$$\begin{array}{l} \Delta A = a_1 - A_{r,1} \\ \Delta A = a_2 - B_{l,2} \\ \hline \Delta A = \frac{1}{2}(a_1 - A_{r,1}) + \frac{1}{2}(a_2 - B_{l,2}). \end{array}$$

In derselben Weise läfst sich ΔA aus jedem folgenden Beobachtungspaare K. R. und K. L. erhalten, und das Gesammtmittel dieser Einzelmittel wird einen zuverlässigen Werth für ΔA liefern.

268. Da der Reisende bei der Bestimmung von ΔA lediglich den Zweck verfolgt, Azimute *terrestrischer* Objecte aus den Ablesungen des Azimutalkreises herzuleiten, so wird er mit der astronomischen Ermittelung von ΔA das Einstellen irdischer Punkte bei *Tageszeit* verbinden und deshalb die ☉ als Beobachtungsgestirn wählen.

Will man das Azimut a eines irdischen Objects O finden, so stellt man dasselbe successive *stets bei K. R. und K. L.* ein. Ist $\delta\omega_0''$ die azimutale Parallaxe von O wegen der Excentricität des Fernrohrs, d. h. $\delta\omega_0'' = \frac{\varrho}{d} \frac{1}{\sin 1''} \operatorname{cosec} z$ (Nr. 183.), so ist gleichzeitig:

$$\begin{aligned} a &= A_r - c \operatorname{cosec} z - b_r \operatorname{ctg} z - \delta\omega_0'' + \Delta A \\ a &= B_l + c \operatorname{cosec} z + b_l \operatorname{ctg} z + \delta\omega_0'' + \Delta A, \end{aligned}$$

d. h.

$$a = \frac{1}{2}(A_r + B_l) + \Delta A + \frac{1}{2}(b_l - b_r) \operatorname{ctg} z.$$

Bei grossem z und sorgfältiger Nivellirung entsteht hieraus:

$$a = \frac{1}{2}(A_r + B_l) + \Delta A.$$

Ist a gegeben, so bestimmt man umgekehrt hiermit:

$$\Delta A = a - \frac{1}{2}(A_r + B_l).$$

269. Unter der Annahme, dafs die ☉ das Beobachtungsgestirn ist, wird der Reisende in folgender Weise verfahren.

Zunächst wird ein geeigneter Bodenpunkt ausgesucht und markirt, über welchem der Mittelpunkt J des U. I. stets wieder

bei jeder neuen Aufstellung liegen mufs, wenn es sich um Azimutbestimmungen handelt.

Man sucht nun weit entfernte, gut einstellbare irdische Objecte in möglichst verschiedenen Richtungen aus, welche willkürlich durch Buchstaben oder Namen bezeichnet werden. Auch empfiehlt es sich, kleine Umrifszeichnungen der Objecte zu nehmen und darin den eingestellten Punkt durch ein Kreuz zu markiren, damit bei einer späteren Beobachtung stets wieder derselbe Punkt eingestellt werde.

Vor dem Beginn der Beobachtungen mache man sich noch einmal klar, dafs ein Stofs gegen das Stativ alle Mühe illusorisch machen kann.

Die ins Auge gefafsten Objecte werden der Reihe nach, von links nach rechts und umgekehrt, eingestellt, zuerst bei K. R., dann bei K. L.

Darauf beobachtet man den rechten oder linken Rand der ⊙, was man stets durch ⊙| oder |⊙ markirt, also so, wie es der Wirklichkeit entspricht und nicht wie es im Fernrohr erscheint. Man läfst den Sonnenrand durch den mittleren Verticalfaden treten, während der Mittelpunkt der ⊙ sich auf dem Horizontalfaden befindet, liest die Uhr ab, das Reiterniveau in beiden Stellungen, den Azimutalkreis und wiederum das Reiterniveau. Danach erfolgt die Ablesung des Höhenkreises und Höhenniveaus, wobei es aber nicht auf grofse Genauigkeit ankommt, weil die Zenitdistanz z nur zur Bildung von $\varrho\, cosec\, z$ (Nr. 270.), event. von $c\, cosec\, z + b\, ctg\, z$ gebraucht wird.

Es werden nun etwa zehn Beobachtungen bei K. R. und bei K. L. genommen und darauf die Einstellungen der irdischen Objecte wiederholt.

Es wird angenommen, dafs die Beobachtungen am Morgen, etwa bei Zenitdistanzen von 70° bis 60° angestellt werden, und dafs unmittelbar nachher eine Zeitbestimmung gemacht wird. Auch müssen die Reiseuhren vor und nach der Vormittagsbeobachtung mit einander verglichen, Thermometer und Barometer abgelesen werden.

Dieselben Operationen in umgekehrter Folge nimmt man nun am Nachmittag vor, womöglich bei annähernd denselben Zenitdistanzen, wodurch die erwünschte Symmetrie der Beobachtungen erreicht wird.

Damit hat man das Material, welches die Meridianablesungen bei K. R. und K. L. liefert und die Azimute der eingestellten Objecte.

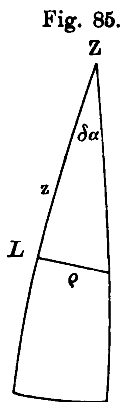
270. Durch die *Berechnung* wird das Azimut des *Sonnenmittelpunktes* S geliefert, während die *Ablesungen* sich auf den linken oder rechten *Sonnenrand* L (Fig. 85.) beziehen, d. h. auf den linken oder rechten Berührungsvertical der Sonnenscheibe. Ist $\delta\alpha$ der Abstand des Berührungsverticals vom Mittelpunktvertical, z die beobachtete Zenitdistanz, ϱ der scheinbare Halbmesser (aus dem Jahrbuch zu entnehmen), so ist strenge:

$$tg\,\delta\alpha = \frac{tg\,\varrho}{sin\,z},$$

wofür man setzen darf:

$$\delta\alpha = \varrho\ cosec\,z.$$

Fig. 85.



Dieser Betrag ist additiv, bezw. subtractiv zu der betreffenden Ablesung hinzuzulegen, je nachdem der linke oder der rechte Sonnenrand beobachtet war.

Wenn es nicht auf die gröfstmögliche Genauigkeit ankommt, so genügt es, das $\delta\alpha$ mit dem z der mittleren Beobachtung zu berechnen und erst nach der Bildung des Mittels als Correction anzubringen.

Auch empfiehlt es sich, die Hälfte der Beobachtungen für $|\odot$, die andere Hälfte für $\odot|$ anzustellen, wobei natürlich auf das peinlichste darauf zu achten ist, dafs keine Verwechselung vom rechten und linken Rand vorkommt. Beispiel siehe Nr. 308.

271. Die azimutalen Beobachtungen sind für den Reisenden von grofser Bedeutung. Denn ein wissenschaftlicher Reisender, welcher überhaupt mit Präcisionsinstrumenten umzugehen weifs und astronomische Ortsbestimmungen vornimmt, wird stets bestrebt sein, nicht nur trigonometrische Höhenmessungen, sondern auch topographische und erdmagnetische Messungen anzustellen. Dazu bedarf es der genauen Kenntnifs der Himmelsrichtungen, wie dieselben durch die Ablesungen und den Indexfehler geliefert werden.

Achter Abschnitt.

Von den Bedingungen, unter welchen ein Fehler in den Stücken *φ, δ, t, z, a* des astronomischen Dreiecks den geringsten Einfluſs übt auf das zu berechnende Stück der Zeit, der Polhöhe, des Azimuts.

---

272. Die erste Anwendung, welche von dem astronomischen Dreieck gemacht wurde, war die Berechnung des Stundenwinkels t aus der Zenitdistanz z eines Gestirns.

Die Gleichung, durch deren Umformung dies ermöglicht wurde, lautete:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

oder

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}.$$

Wäre nun z falsch gemessen und wäre nicht z, sondern $z + \Delta z$ der *wahre Werth der Zenitdistanz*, so könnte auch nicht t der Werth des gesuchten Stundenwinkels sein, sondern derjenige Werth $t + \Delta t$ müſste es sein, welcher der Gleichung genügte:

$$\cos(t + \Delta t) = \frac{\cos(z + \Delta z) - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}.$$

Der Werth von Δt hängt ab von Δz, z, t, φ, δ und verschwindet gleichzeitig mit Δz.

Der Fehler Δt wird also für *dasselbe* Δz *verschieden groſs* ausfallen können, weil das astronomische Dreieck fortwährend ein anderes wird, und t, a, q, z einer continuirlichen Veränderung

unterworfen sind. Deshalb ist es unsere Aufgabe, ausfindig zu machen, bei *welcher* Lage des durch φ und δ gegebenen, aber veränderlichen astronomischen Dreiecks *derselbe Fehler* Δz den *kleinsten Fehler* Δt hervorbringt; diese Lage würde alsdann die günstigsten Bedingungen liefern, unter welchen aus der Zenitdistanz z eines Sterns δ sein Stundenwinkel t abgeleitet werden könnte.

Die Untersuchung wird auch lehren, dafs bei günstigsten Bedingungen *derselbe* Fehler Δz für die Zenitdistanz z' eines *zweiten* Sternes δ' *nicht* denselben Fehler Δt in Bezug auf den Stundenwinkel t' des zweiten Sternes hervorbringt, sondern einen Fehler $\Delta t'$, welcher numerisch gröfser oder kleiner als Δt sein kann. Man wird also entsprechend dem ersten oder dem zweiten Stern den Vorzug für die Beobachtung geben.

Abgeleitete Functionen und Differentiale.

273. Das Rechnungsverfahren, welches für diese Untersuchung und alle ähnlichen dient, beruht auf der Voraussetzung, dafs die in Frage kommenden Fehler *Werthe sehr kleiner Bogen oder Winkel* sind, deren höhere Potenzen gegen die erste Potenz vernachlässigt werden dürfen, wenn das *Bogenmafs* die Einheit ist. Das Verfahren verlangt den Begriff der *abgeleiteten Function* und die Kenntnifs des *Taylor'schen Satzes.*

Der Begriff der abgeleiteten Function soll zunächst an einem einfachen Beispiel erläutert werden.

Eine Function y (Nr. 51.) sei in folgender Weise von einer anderen veränderlichen Zahl x (Argument oder unabhängige Variable) abhängig. Es sei

$$y = a + bx + cx^2,$$

wo a, b und c bestimmt gegebene, unveränderliche Zahlen (Constanten) bedeuten. Aendert sich x, so ändert sich y; z. B. für $x = 0$ ist $y = a$; für $x = 1$ ist $y = a + b + c$; es entspricht also einer Aenderung des x von 0 auf 1 eine Aenderung des y von a auf $a + b + c$. *Allgemein* soll einer Aenderung von x auf $x + \Delta x$ eine Aenderung von y auf $y + \Delta y$ entsprechen. Es würde also aus

$$y = a + bx + cx^2$$

entstehen:

$$y + \varDelta y = a + b\,(x + \varDelta x) + c\,(x + \varDelta x)^2$$

oder:

$$y + \varDelta y = (a + bx + cx^2) + (b + 2\,c\,x)\varDelta x + c\varDelta x^2,$$

und als *Differenz* beider Gleichungen:

$$\varDelta y = (b + 2\,c\,x)\varDelta x + c\varDelta x^2.$$

Um diesen Betrag ändert sich y, wenn das Argument seinen Werth von x auf $x + \varDelta x$ ändert. $x = 0$, $\varDelta x = 1$ liefert

$$\varDelta y = b + c,$$

und das ist der vorher ermittelte Betrag des Wachsthums von y, wenn x für den Werth 0 das Wachsthum 1 erfährt. Ferner liefert unsere Gleichung:

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = (b + 2\,c\,x) + c\varDelta x.$$

274. Das Verhältnifs $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ ist abhängig von x und $\varDelta x$, hört aber auf von $\varDelta x$ abhängig zu sein, wenn der Zuwachs $\varDelta x$ so klein wird, d. h. der *Grenze* 0 so nahe kommt, dafs wir die Zahlen $(b + 2\,c\,x)$ und $(b + 2\,c\,x) + c\varDelta x$ nicht länger zu unterscheiden vermögen.

Diese Eigenschaft des $\varDelta x$, so klein zu sein, wie soeben angegeben, soll dadurch gekennzeichnet werden, dafs der Zuwachs mit dx, statt mit $\varDelta x$, bezeichnet wird und das dem dx entsprechende $\varDelta y$ mit dy.

Ferner soll diejenige Function, welche aus der rechten Seite von

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = (b + 2\,c\,x) + c\varDelta x$$

hervorgeht, wenn darin $\varDelta x = 0$ gesetzt wird, mit y' bezeichnet und die *abgeleitete oder derivirte Function von y* genannt werden. Es ist alsdann das Verhältnifs von dy zu dx gegeben durch:

$$\frac{dy}{dx} = y',$$

folglich wird

$$dy = y'\,dx.$$

So lange also $\varDelta x$ so klein ist, dafs es mit dx bezeichnet werden darf, ist der *Zuwachs* dy, welchen dx für y bewirkt, *gleich dem Product der abgeleiteten Function in den kleinen Zuwachs* dx.

275. Das auseinandergesetzte *Princip ist übertragbar auf jede continuirliche Function* $y = f(x)$ von x, d. h. auf jede Function, deren Aenderungen nicht sprungweise, sondern so erfolgen, dafs dy und dx für jedes x in einem endlichen Verhältnifs bleiben. Es ist aber auch übertragbar auf solche continuirlichen Functionen $y = F(x, u)$, welche nicht von *einer*, sondern von *zwei* Veränderlichen x und u abhängen. In diesem Falle besitzt y *zwei* abgeleitete Functionen, nämlich die aus den beiden Ausdrücken

$$\frac{F[(x + \Delta x), u] - F(x, u)}{\Delta x} \text{ und } \frac{F[x, (u + \Delta u)] - F(x, u)}{\Delta u}$$

entstehenden Functionen, wenn darin Δx und Δu gleich Null gesetzt werden. Diese Functionen werden bezeichnet mit $\frac{\partial F(x, u)}{\partial x}$ und $\frac{\partial F(x, u)}{\partial u}$. Mittels derselben und des erweiterten Taylor'schen Satzes für zwei unabhängige Variablen (Nr. 278, 279.) läfst sich der Zuwachs dy, welchen y erfährt, wenn x den Zuwachs dx, u den Zuwachs du erfährt, darstellen in der Form:

$$dy = \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} du.$$

Der Ausdehnung des Princips auf eine Function y von beliebig vielen unabhängigen Variablen steht offenbar nichts im Wege.

Man nennt $\frac{\partial F(x, u)}{\partial x}$, bezw. $\frac{\partial F(x, u)}{\partial u}$ den *partiellen Differentialquotienten* von $F(x, u)$ nach x, bezw. nach u. Ist y nur von *einer* Variablen x abhängig, so gibt es nur *einen* Differentialquotienten, welcher für den Fall $y = f(x)$ bezeichnet wird mit

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Die Bezeichnung $\frac{dy}{dx}$ gilt also sowohl für das Verhältnifs von dy und dx wie für die abgeleitete Function von y.

dy heifst das *Differential der Function* y, gleichviel ob die Function y von *einer* oder *beliebig vielen* unabhängigen Variablen abhängt.

Ist

$$y = f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n),$$

wo $x_1, x_2 \dots x_n$ die n unabhängigen Variablen der Function y bezeichnen, so ist die *allgemeinste Form des Differentials*:

$$d y = \frac{\partial f}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d x_2 + \cdots \frac{\partial f}{d x_n} d x_n.$$

Soll die Function y die Eigenschaft haben, *dafs ihr Werth stets* $= 0$ *ist*, so sind die bisher unabhängigen Variablen $x_1, x_2 \dots x_n$ an die Bedingung gebunden:

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = 0,$$

und es müssen ihre Wachsthümer $d x_1, d x_2, \dots d x_n$ ein Wachsthum $d y$ hervorbringen, welches gleich Null ist; d. h. es mufs auch sein:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d x_2 + \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} d x_n = 0.$$

276. Die auseinandergesetzten Principien bilden die Grundlage der *Differentialrechnung.* Ihre nächste Aufgabe ist es, die abgeleiteten Functionen bekannter Functionen wie $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$, $ctg\, x$, $l\, x$, e^x u. s. w. sowie einfacher Ausdrücke aus letzteren aufzusuchen und alle Rechnungsregeln für die Differentiation, d. h. Aufstellung des Differentials einer Function von beliebig vielen Variablen zu geben.

277. Dieselbe Ueberlegung, welche von $y = f(x)$ zu der abgeleiteten Function $y' = f'(x) = \frac{d f(x)}{d x}$ geführt hat, führt von y' zu der abgeleiteten Function von y'; man bezeichnet sie mit y'', mit $f''(x)$ oder $\frac{d^2 f(x)}{d x^2}$, so dafs

$$y'' = \frac{d f'(x)}{d x} = \frac{d \frac{d f(x)}{d x}}{d x} = \frac{d^2 f(x)}{d x^2} = f''(x)$$

wird, und nennt y'' die *zweite Ableitung* oder den *zweiten Differentialquotienten* von y. Das eingeführte Zeichen $\frac{d^2 f(x)}{d x^2}$ ist damit definirt. So kann man fortfahren. Für die Functionen von der Form $a + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$ ist die Anzahl der abgeleiteten Functionen beschränkt, nämlich gleich $n - 1$, und $\frac{d^n f(x)}{d x^n}$ ist eine Constante, d. h. frei von x.

Analog versteht man in Bezug auf eine Function

$$y = F(x_1, x_2, \dots x_n)$$

von n Variablen, von denen irgend zwei mit x_i und x_k bezeichnet werden sollen, unter

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}$$

die Function, welche entsteht, wenn die abgeleitete Function von F in Bezug auf x_i gebildet wird und aus der letzteren die abgeleitete Function in Bezug auf x_k. Die Ableitung einer Function in Bezug auf eine ihrer Variablen bilden, heifst *„die Function nach dieser Variablen differentiiren"*.

Differentiirt man F nach x_i, so entsteht $\frac{\partial F}{\partial x_i}$; differentiirt man die letztere Function nach x_k, so entsteht $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}$. Es läfst sich zeigen, dafs die Functionen $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i}$ *identisch* sind oder, wie man sich ausdrückt, dafs es nicht auf die Reihenfolge des Differentiirens ankommt.

Der Taylor'sche Satz.

278. Der Taylor'sche Satz ist für alle Anwendungen der Differentialrechnung auf Probleme der exacten Wissenschaften von grundlegender Bedeutung. Derselbe stellt $f(x + \Delta x)$ als eine convergente Reihe der fortschreitenden Potenzen von Δx dar, falls die Bedingungen der Continuität erfüllt sind, und lautet:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{d f(x)}{d x}$$
$$+ \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{d^2 f(x)}{d x^2} + \frac{1}{1.2.3} \Delta x^3 \frac{d^3 f}{d x^3} \cdots;$$

das „allgemeine" Glied ist $\frac{1}{1.2 \dots n} \Delta x^n \frac{d^{(n)} f(x)}{d x^n}$, besteht also aus den drei Factoren $\frac{1}{1.2 \dots n} = \frac{1}{n!}$, gesprochen 1 durch n Facultät, aus der n^{ten} Potenz von Δx und aus der n^{ten} Ableitung oder dem n^{ten} Differentialquotienten von $f(x)$.

Ist f eine Function von n Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$, so lautet der Satz, wenn er nur für drei Variablen hingeschrieben wird:

$$f(x_1 + \varDelta x_1, x_2 + \varDelta x_2, x_3 + \varDelta x_3)$$
$$= f(x_1, x_2, x_3) + \left(\varDelta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \varDelta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \varDelta x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left(\varDelta x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \varDelta x_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \varDelta x_3^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} + 2\varDelta x_1 \varDelta x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right.$$
$$\left. + 2\varDelta x_1 \varDelta x_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} + 2\varDelta x_2 \varDelta x_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}\right) \cdots$$

279. So lange die Zuwächse $\varDelta x, \varDelta x_1, \varDelta x_2, \ldots$ so klein bleiben, dafs ihre höheren Potenzen vernachlässigt werden dürfen, wollen wir sie mit $\delta x, \delta x_1, \ldots$ bezeichnen. Dann entstehen die Näherungsgleichungen:

$$f(x + \delta x) = f(x) + \delta x \frac{df}{dx} \cdots,$$

bezw.

$$f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \ldots)$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots) + \left(\delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots\right) \cdots,$$

oder wenn

$$\delta y = f(x + \delta x) - f(x),$$

bezw.

$$\delta y = f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \ldots) - f(x_1, x_2 \ldots)$$

gesetzt wird,

$$\delta y = \delta x \frac{df}{dx},$$

bezw.

$$\delta y = \delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots,$$

wo f ohne die Klammer der Argumente hingeschrieben ist. Wir erhalten also den Werth, um welchen sich eine Function bei *kleinen* Veränderungen ihrer Argumente ändert, wenn wir ihr *Differential bilden und δx statt dx setzen.*

Soll der Werth von $y = f(x_1, x_2 \ldots)$ stets gleich 0 sein, so mufs es auch analog Nr. 275. Ende der durch die Zuwächse der unabhängigen Variablen gelieferte Zuwachs δy sein; daraus folgt:

$$0 = \delta y = \delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots$$

Anwendung auf das astronomische Dreieck.

280. Das Verfahren soll nun angewandt werden auf die Function [Nr. 162., (B.) 1.]:

$$y = f(z, \varphi, \delta, t) = \cos z - \sin\varphi \sin\delta - \cos\varphi \cos\delta \cos t = 0.$$

Wird y successive nach z, φ, δ, t differentiirt und darauf das Differential dy gebildet, welches $= 0$ sein mufs, so entsteht unter *Berücksichtigung der für das astronomische Dreieck geltenden Formeln* die Gleichung $dy = 0$, welche sich schreiben läfst:

$$(A) \quad dt = dz \frac{1}{\sin a \cos\varphi} - d\varphi \frac{\cos a}{\sin a \cos\varphi} + d\delta \frac{\cos q}{\sin a \cos\varphi},$$

oder auch, weil

$$\sin a \cos\varphi = \sin q \cos\delta$$

ist:

$$(B) \quad dt = dz \frac{1}{\sin q \cos\delta} - d\varphi \frac{\cos a}{\sin q \cos\delta} + d\delta \frac{\cos q}{\sin q \cos\delta}.$$

Man beachte, dafs der Nenner der Coëfficienten von dz, $d\varphi$, $d\delta$ derselbe ist. Analog liefert (Nr. 164., 2.)

$$F(a, t, \varphi, \delta) = ctg\, a \sin t - \sin\varphi \cos t + \cos\varphi\, tg\,\delta = 0:$$

$$0 = -da \sin z + dt \cos\delta \cos q - d\varphi \sin a \cos z + d\delta \sin q$$

oder

$$(C) \quad da \sin z = -d\varphi \cos z \sin a + d\delta \sin q + dt \cos\delta \cos q$$

oder

$$(D) \quad da = dt \frac{\cos\delta \cos q}{\sin z} + d\delta \frac{\cos\varphi \sin t}{\sin^2 z} - d\varphi \frac{\sin a}{tg\, z},$$

nachdem gesetzt ist:

$$\sin q = \frac{\cos\varphi \sin t}{\sin z}.$$

Fehlereinflüsse bei Zeitbestimmungen durch Zenitdistanzen.

281. In jeder der Gleichungen (A), (B) und (C), (D) (Nr. 280.) läfst sich jedes der darin auftretenden vier Differentiale als eine Function der drei anderen auffassen; sie werden *Näherungsgleichungen*, sobald wir, wie dies im Folgenden geschieht, statt der unendlich kleinen Differentiale dx kleine endliche Zahlen dx (Werthe kleiner Bogen und Winkel im Bogenmafs) setzen.

Die beiden äquivalenten Gleichungen

$$(A)\quad dt = dz\,\frac{1}{\sin a\,\cos\varphi} - d\varphi\,\frac{\cos a}{\sin a\,\cos\varphi} + d\delta\,\frac{\cos q}{\sin a\,\cos\varphi}$$

und

$$(B)\quad dt = dz\,\frac{1}{\sin q\,\cos\delta} - d\varphi\,\frac{\cos a}{\sin q\,\cos\delta} + d\delta\,\frac{\cos q}{\sin q\,\cos\delta}$$

sagen dann Folgendes aus: *wenn der Berechnung des Stundenwinkels t die Werthe z, φ, δ für das astronomische Dreieck zu Grunde gelegt worden sind, wenn aber nicht diese, sondern $z + dz$, $\varphi + d\varphi$, $\delta + d\delta$ die wahren Werthe sind, so ist $t + dt$ der wahre Werth des Stundenwinkels.*

Die günstigsten Bedingungen, unter welchen der Werth von t abgeleitet wird, werden deshalb diejenigen sein, für welche dt bei gleichen Werthen der Fehler dz, $d\varphi$, $d\delta$ den kleinsten Werth erhält, für welche also die Coëfficienten von dz, $d\varphi$, $d\delta$ den kleinsten Werth annehmen.

Es sei noch einmal daran erinnert, dafs wenn Stern δ und Zenit φ auf *derselben* Seite des Aequators liegen ($\varphi\delta$ plus), dafs alsdann der Stern zweimal *sichtbar* durch den I. Vertical, d. h. durch den Vertical des Ostpunktes und Westpunktes tritt, falls $(\varphi) > (\delta)$; und zweimal *sichtbar* durch die Punkte der gröfsten Digression, falls $(\varphi) < (\delta)$ ist. Der östliche, bezw. westliche Digressionskreis ist der Vertical, welcher den östlichen, bezw. den westlichen Halbkreis des Sternparallels berührt.

Steht der Stern im *Ost- oder Westvertical* (I. Vertical), so gelten die Gleichungen:

$$\cos z = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi},\ \cos\tau = \frac{tg\,\delta}{tg\,\varphi},\ \sin\varkappa = \frac{\cos\varphi}{\cos\delta}\ \text{(Nr. 171. b.)},$$

wo $t = \tau$, $q = \varkappa$ für West; $t = 360^0 - \tau$, $q = 360^0 - \varkappa$ für Ost wird.

Steht der Stern in einem der beiden *Punkte gröfster Digression*, so ist:

$$\cos z = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta},\ \cos\tau = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\delta},\ \sin\alpha = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}\ \text{(Nr. 171. c.)},$$

wo $t = \tau$, $a = 180^0 - \alpha$ für West; $t = 360^0 - \tau$, $a = 180^0 + \alpha$ für Ost wird.

Für den I. Vertical ist $a = 90^0$, bezw. 270^0; also Cosinus und Cotangens gleich 0, Sinus numerisch gleich 1. Da $\sin a\,\cos\varphi = \sin q\,\cos\delta$, so hat $\sin q$ daselbst numerisch sein Maximum.

Für die gröfste Digression ist $q = 90^0$, bezw. 270^0, also Cosinus und Cotangens gleich 0, Sinus numerisch gleich 1; $\sin a$ hat daselbst numerisch sein Maximum.

Für $(\varphi) > (\delta)$ wird also die günstigste Lage eines Zeitsterns im I. Vertical sein. Dies lehren die Coëfficienten von dz, $d\varphi$, $d\delta$ in Gleichung (A) und (B); sie erhalten numerisch die kleinsten Werthe, welche sie überhaupt annehmen können: der Coëfficient von dz wird $\frac{1}{\cos\varphi}$, derjenige von $d\varphi$ wird 0, derjenige von $d\delta$ wird $\frac{\cos q}{\cos\varphi} = \frac{ctg\, q}{\cos\delta}$, wo $\cos q$ und $ctg\, q$ ihren kleinsten Werth besitzen. Aus der Form (B), in welcher $\cos\delta$ in dem Nenner jedes Coëfficienten auftritt, folgt, dafs die Werthe der Coëfficienten um so kleiner werden, je *näher der Stern dem Aequator liegt*, und aus der Form (A) folgt, dafs Zeitbestimmungen durch Zenitdistanzen in niedrigen Breiten, wo φ klein, also $\cos\varphi$ nahe bei 1 ist, weniger von etwa vorhandenen Fehlern beeinflufst werden, als solche in höheren Breiten.

Für $(\varphi) < (\delta)$ wird die günstigste Lage des Zeitsterns bei seiner Coincidenz mit einer gröfsten Digression eintreten; dies lehren die Coëfficienten der Gleichungsform (B).

282. Sehr Wichtiges lehren nun auch die Gleichungen (A) und (B) (Nr. 281.) für den Fall, dafs *derselbe* Stern in *symmetrischen* Lagen, d. h. in gleichen östlichen und westlichen Abständen vom oberen Meridian beobachtet wird. Für ein solches Beobachtungspaar behält jeder Fehlercoëfficient *denselben* numerischen Werth für beide Lagen, während die Zeichen *entgegengesetzt* sind. Bleiben also die Fehler dz, $d\varphi$, $d\delta$ unverändert, was für $d\varphi$ und $d\delta$ stets angenommen werden darf, und ergibt sich für den beobachteten Stundenwinkel aus der ersten Lage die Correction δt, so ist sie für die zweite Lage genähert $-\delta t$. Von den aus beiden Beobachtungen abgeleiteten Uhrcorrectionen wird die eine um δt zu grofs, die andere nahezu um δt zu klein, also ihr Mittel ziemlich frei von diesem Fehler sein. dz wird zwar nicht genau dasselbe sein bei beiden Beobachtungen, weil es aus zufälligen Fehlern und aus constanten Fehlern besteht; aber die letzteren heben sich fort und auch die ersteren werden sich theilweise zerstören.

Die Verhältnisse auf Reisen verlangen meist, dafs die Beobachtungen nicht übermäfsig ausgedehnt werden, und diese Bedingung collidirt mit der Forderung symmetrischer Beobachtungen desselben Sterns. Man wird deshalb an Stelle der symmetrischen Beobachtungen im Westen die Beobachtungen eines *anderen*, symmetrisch gelegenen Sternes treten lassen, wenn ein passender vorhanden ist. Dieselben können dann den östlichen Beobachtungen folgen oder vorausgehen. Je weniger die Declinationen der beiden Sterne verschieden sind, um so symmetrischer werden sie gelegen sein, wenn man sie im I. Vertical, bezw. in der gröfsten Digression beobachtet.

Damit sind die Regeln begründet, welche für das Beobachten der Zenitdistanzen von Zeitsternen gelten.

Einflufs der Fehler auf die Bestimmung der Polhöhe.

283. Der Gleichung Nr. 281. (*A*) läfst sich die Form geben:

$$d\varphi = dz \frac{1}{\cos a} - dt \operatorname{tg} a \cos\varphi + d\delta \frac{\cos q}{\cos a}.$$

Für den oberen und unteren Meridian sind a und q gleich Null oder gleich 180°; also sind $\cos a$ und $\cos q$ numerisch gleich 1 und $\operatorname{tg} a = 0$. Daraus folgt, dafs $d\varphi$ am kleinsten wird, wenn der Stern in *der oberen oder unteren Culmination* beobachtet wird. Wird *derselbe* Stern, wie dies bei circummeridianen Zenitdistanzen der Fall ist, im *Osten und Westen* beobachtet, so behalten $\cos q$ und $\cos a$ ihr Zeichen, während das von $\operatorname{tg} a$ umschlägt. Constante Fehler der Zenitdistanz und der Declination heben sich also *nicht* weg, wenn man das *Mittel* der Beobachtungsresultate bildet. Wohl aber wird ein Fehler dt der Uhrcorrection stark verringert und würde ganz unschädlich werden, wenn die circummeridianen Beobachtungen völlig symmetrisch lägen.

Werden zwei Sterne, von denen der eine nördlich, der andere südlich culminirt, in der O. C. beobachtet, so werden $\cos a$ und $\cos q$ gleich -1 für den Nordstern, gleich $+1$ für den Südstern. Demgemäfs sind die Coëfficienten von dz in beiden Fällen gleich und entgegengesetzt. Kleine constante Fehler von dz werden sich also in dem für φ abgeleiteten Mittel nördlicher und südlicher Beobachtungen wegheben.

Fehlereinflüsse bei Azimutbestimmungen.

284. Die Wirkungen der Fehler dt, $d\varphi$ und $d\delta$ auf das Azimut sind in den äquivalenten Gleichungen (Nr. 280.) zusammengefafst:

$$(C) \qquad da = dt\,\frac{\cos\delta\,\cos q}{\sin z} + d\delta\,\frac{\sin q}{\sin z} - d\varphi\,\operatorname{ctg} z\,\sin a,$$

$$(D) \qquad da = dt\,\frac{\cos\delta\,\cos q}{\sin z} + d\delta\,\frac{\cos\varphi\,\sin t}{\sin^2 z} - d\varphi\,\operatorname{ctg} z\,\sin a.$$

Dieselben sagen aus, dafs wenn die Berechnung von a mit den ungenauen Werthen t, δ, φ gemacht worden ist, während $t + dt$, $\delta + d\delta$, $\varphi + d\varphi$ die richtigen Werthe sind, dafs alsdann nicht a, sondern $a + da$ das richtige Azimut ist.

Für zwei *symmetrische* Beobachtungen des Azimutes, deren jede darin besteht, dafs die Uhr und der Azimutalkreis für den Durchtritt des Gestirns durch den verticalen Mittelfaden abgelesen wird, bleiben sämmtliche Fehlercoëfficienten *numerisch unverändert*, während die *Zeichen* für die mit $d\delta$ und $d\varphi$ behafteten Glieder *umschlagen*; das mit dt behaftete Glied *ändert auch das Zeichen nicht.* Denn die Winkel a, t, q der einen Lage sind den entsprechenden der anderen Lage conjugirt; also haben Sinus, Tangens, Cotangens entgegengesetzte Zeichen, Cosinus dagegen bleibt unverändert, weil $\cos(360^0 - \alpha) = \cos\alpha$ ist.

Der Fehler der Uhrcorrection wird also durch symmetrische Beobachtungen nicht beseitigt; wohl aber dadurch, dafs man einen Digressionsstern [$\varphi\delta$ plus, $(\delta) > (\varphi)$] für die Beobachtung wählt und womöglich einen solchen, welcher grofsen Aequatorabstand hat. Denn für die gröfste Digression wird $\cos q = 0$ und in ihrer Nähe wird $\frac{\cos\delta}{\sin z}$ für dasselbe φ um so kleiner, je näher der Stern dem sichtbaren Pol liegt. Für die gröfste Digression selbst ist $\cos z = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}$, ein Ausdruck, welcher abnimmt, wenn δ numerisch zunimmt; also wächst z, folglich auch $\sin z$, während $\cos\delta$ abnimmt.

Auf Reisen wird vornehmlich die ☉ für Azimutbeobachtungen verwerthet. Es wird sich hierbei empfehlen, die ☉ bei

grofsen Zenitdistanzen Morgens und Nachmittags zu beobachten. Denn alle Coëfficienten haben *sin* z im Nenner; *sin* z mufs also so grofs genommen werden, wie es sich mit den übrigen Bedingungen verträgt. Durch die symmetrischen Beobachtungen wird der für die ☉ wohl stets anzunehmende Fehler $d\,\delta$ der Declination unschädlich gemacht. Ferner wird man gut thun, Zeitbestimmungen in Verbindung mit jeder Azimutbestimmung anzustellen, damit $d\,t$ möglichst klein werde.

Neunter Abschnitt.

Das Nautische Jahrbuch und der Gebrauch fünfstelliger Logarithmentafeln.

---

285. Für die Beobachtungen und Berechnungen legen wir das Nautische Jahrbuch (N. J.) zu Grunde. Dasselbe erscheint gegenwärtig etwa drei Jahre vor Beginn des Jahres, auf welches sich seine Angaben beziehen. Sein Titel lautet:

„Nautisches Jahrbuch oder Ephemeriden und Tafeln für das Jahr . . ., zur Bestimmung der Zeit, Länge und Breite zur See nach astronomischen Beobachtungen. Herausgegeben vom Reichsamt des Inneren.“ Berlin (Jahr des Erscheinens).

Die bis zum Ablauf des Jahres 1902 festgehaltene Einrichtung des Jahrbuches hat für die darauf folgenden Jahrgänge einige wesentliche Veränderungen erfahren, über welche das Vorwort des Jahrbuches 1903 Auskunft gibt. Unter anderem haben die Tafeln 3 und 4, zur Verwandlung der M. Z. in St. Z. und umgekehrt, die bequeme Einrichtung erhalten, welche die Tafeln von Peters und von Albrecht besitzen. Davon wird bereits in den folgenden Beispielen Gebrauch gemacht werden. Ferner werden die Mondcoordinaten von Stunde zu Stunde gegeben, statt von drei zu drei Stunden, wie bis 1902. Die Interpolationen wegen der zweiten Differenzen sind dadurch überflüssig geworden und die Tafeln dafür in Fortfall gekommen; die ihnen zu Grunde liegende Formel braucht hier nicht mehr entwickelt zu werden.

Den Tafeln vorangeschickt sind: a) Einleitung, b) Erklärung der Ephemeriden, c) Erklärung der Tafeln. Wer das Nautische Jahrbuch zum ersten Male in Gebrauch nimmt, wird gut thun, diese einleitende Uebersicht aufmerksam durchzulesen.

In dem letzten Satze der Einleitung a) wird das Azimut eines Sternes definirt als der östliche oder westliche Abstand des Sternverticals von dem Vertical des sichtbaren Himmelspoles, während in diesem Buche Azimut a den westlich genommenen Abstand des Sternverticals von dem Vertical des südlichen Himmelspoles bedeutet. Je nach der Lage von Zenit und Stern wird das Jahrbuch-Azimut bezw. $= a$, $360^0 - a$, $180^0 - a$, $a - 180^0$.

286. Tafeln geben stets die Werthe einer Function y, d. h. einer Zahl, welche von einer anderen Zahl, dem Argument x, abhängt, für bestimmte äquidistante Werthe des Arguments. Solche Tafeln heifsen *Ephemeriden*, wenn die Function mit der *Zeit* veränderlich ist und wenn das Argument, welches ein *Zeitintervall* ist, durch den *Zeitpunkt* angegeben wird, für welchen der Tafelwerth gilt.

Die Verwerthbarkeit der Tafeln auch für solche Argumente x, welche sich *nicht* in den Tafeln finden, beruht auf dem Verfahren der *Interpolation*. Dasselbe ist äufserst einfach unter den Bedingungen, welche sowohl für die Tafeln und Ephemeriden des Nautischen Jahrbuches in seiner neuen Gestalt erfüllt sind, wie auch für Logarithmentafeln.

Für alle diese Tafeln gilt Folgendes:

Sind x_0, x_1 zwei auf einander folgende Tafelargumente und y_0, y_1 die zugeordneten Functionswerthe der Tafel; ist x ein zwischen x_0 und x_1 gelegenes Argument (also $x_0 < x < x_1$) und y der zugeordnete Functionswerth, so darf gesetzt werden:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \text{ d. h. } y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0).$$

Für das gegebene Tafelintervall $x_1 - x_0$ ist $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ eine Constante c, also wird für ein beliebiges Werthpaar x, y des Intervalls:

$$y - y_0 = c\,(x - x_0).$$

Ist x', y' ein zweites Werthpaar *desselben* Intervalls, so ist demnach:

$$y' - y_0 = c\,(x' - x_0).$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$y' - y = c\,(x' - x).$$

Die Function y ändert sich also für jedes zwischen x_0 und x_1 gelegene Argument x um den Betrag $c\xi$, wenn x sich um ξ ändert und $x + \xi < x_1$ bleibt. Gleichen Aenderungen des Arguments entsprechen demnach gleiche Aenderungen der Function, und man sagt: die Function ändert sich gleichförmig. Für die Functionen, welche im Jahrbuch tabulirt sind, trifft dies entweder genau zu oder so weit, dafs es erlaubt ist, den entstandenen Fehler zu vernachlässigen.

287. Treten *Ephemeriden* an Stelle der von der Zeit unabhängigen *Tafeln*, so wollen wir in

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0)$$

t an Stelle von x setzen; dann sind den Argumenten t_0, t, t_1 drei Zeitpunkte T_0, T, T_1 zugeordnet.

Führen wir aufserdem ein:

$$t - t_0 = T - T_0 = \tau,\ t_1 - t_0 = T_1 - T_0 = \varDelta t,\ y_1 - y_0 = \varDelta y,$$

so entsteht:

$$y = y_0 + \frac{\tau}{\varDelta t}\varDelta y.$$

τ und $\varDelta t$ sind selbstverständlich auf dieselbe Zeiteinheit bezogen; wir wählen dafür die mittlere Stunde mit der Bemerkung, dafs $\frac{\tau}{\varDelta t}$ von der Wahl der Einheit unabhängig ist.

$\varDelta t^h$ heifst die *Zwischenzeit* der Ephemeride. In dem Nautischen Jahrbuch neuer Anordnung (1903 ff.) ist $\varDelta t$ entweder $= 24^h$ oder $= 1^h$.

Für den Fall $\varDelta t = 24^h$ ist in den Tafeln gleichzeitig der Werth $\frac{1}{24}\varDelta y = \delta y$ (aber *ohne* Vorzeichen, das hinzugesetzt werden mufs) mit der Ueberschrift „stündliche Aenderung“ gegeben. Die Gleichung

$$y = y_0 + \frac{\tau}{\varDelta t}\varDelta y$$

geht dadurch über in:

$$y = y_0 + \frac{\tau^h}{24}\varDelta y = y_0 + \tau^h\,\delta y$$

und liefert nach Ausführung der Multiplication $\tau^h\,\delta y$ den gesuchten Werth y.

Diese Interpolation wird beispielsweise verlangt für die vier Ephemeriden der Seite I jedes Monats.

Für den Fall $\varDelta t = 1$ ist in den Ephemeriden gleichzeitig der Werth $\frac{1}{60}\varDelta y = \delta y$ (*auch* ohne Vorzeichen) mit der Ueberschrift „Aenderung in 1^m" gegeben. Die Gleichung:

$$y = y_0 + \frac{\tau}{\varDelta t}\varDelta y$$

geht dadurch über in:

$$y = y_0 + \frac{\tau^h}{1}\varDelta y = y_0 + 60\,\tau^h\,\delta y,$$

und es ist $60\,\tau^h$ der Werth des Zeitintervalls τ für die Einheit der *Zeitminute.*

288. Die Zeitpunkte, auf welche sich die Werthe der Ephemeriden beziehen, sind in Greenwicher mittlerer Zeit gegeben.

In Nr. 113. war erkannt worden:

Hat ein Zeitpunkt T für Ortszeit das vollständige Kalenderdatum K, τ^h (z. B. 1902. Januar $27^d\,17^h\,33^m\,46^s5$) und ist $\pm\lambda^h$ die westliche, bezw. östliche Länge des Meridians (λ nicht gröfser als 12^h), so entsteht das Greenwichdatum des Zeitpunktes T aus $K + \tau^h \pm \lambda^h$. Ist umgekehrt K_0, τ^h das Kalenderdatum eines Zeitpunktes für Greenwich, so entsteht das Datum desselben Zeitpunktes für einen Ort der westlichen, bezw. östlichen Länge $\pm\lambda^h$ aus $K_0 + \tau^h \mp \lambda^h$.

Der Gebrauch der Ephemeriden setzt also die Kenntnifs der Ortslänge voraus. Aus den stündlichen Veränderungen der Rectascensionen α_m und $\alpha_\odot$ (mittlere und wahre Sonne), der Zeitgleichung $\omega = \alpha_\odot - \alpha_m$, der Sonnendeclination, der Mondcoordinaten kann man ersehen, welche Fehler ein Fehler in der Länge zur Folge hat. Beispielsweise ist $\varDelta\alpha$, d. h. die constante stündliche Aenderung von α_m gleich 9^s86; hiermit wird die Sternzeit ϑ_0 des mittleren Ortsmittags abgeleitet; ist also die Länge um $6^m = 0^h1$ falsch, so würde ϑ_0 um 1^s falsch werden.

289. Für die Beobachtungen auf Reisen benutzt man diejenigen Sterne, deren Liste auf S. 224 bis 227 des Jahrbuches gegeben ist; dieselbe enthält 180 Sterne. Da α und δ eines Sternes in Folge der Präcession veränderlich sind, so sind auf

S. 228 bis 242 die Werthe der Rectascension und Declination für zwei Polarsterne von zwei zu zwei Tagen und für 130 andere Sterne von 20 zu 20 Tagen des laufenden Jahres gegeben.

Man wird gut thun, die sichtbaren Jahrbuchsterne auf einer Sternkarte aufzusuchen und ihre gegenseitige Lage an der Himmelskugel zu verificiren. Die *Bezeichnung der Sterne* geschieht mittels des *Sternbildes*, zu welchem sie gehören, und einem *griechischen Buchstaben*, z. B. α Andromedae, β Ursae minoris, μ Geminorum. Viele der Jahrbuchsterne, welche fast sämmtlich erster bis dritter Gröfse sind, besitzen noch besondere Namen, z. B. Polaris, Capella, Rigel, Sirius, Procyon, Arcturus, Wega.

Gebrauch der fünfstelligen Logarithmentafeln.

290. Unsere Rechnungen stellen uns häufig vor die Aufgabe den Werth einer Zahl $A = \frac{p_1 p_2 \dots p_i}{q_1 q_2 \dots q_k}$ zu ermitteln, wenn die Werthe der positiv angenommenen Zahlen $p_1, p_2 \dots p_i$ und $q_1, q_2 \dots q_k$ gegeben sind. Hierzu dienen die Tafeln der dekadischen Logarithmen. Denn zur Vermeidung der Multiplication und Division berechnet man $log\, A$ an Stelle von A, indem man setzt (Nr. 26.):

$$log\, A = log\, p_1 + log\, p_2 \dots + log\, p_i + (-log\, q_1) \dots + (-log\, q_k).$$

Für die Berechnung von Reisebeobachtungen empfiehlt sich am meisten der Gebrauch der fünfstelligen Logarithmentafeln; doch gibt es Fälle, in denen vier-, selbst dreistellige Tafeln ausreichen würden. Für das Rechnen ist das Princip der Kräfteökonomie ebenso wichtig, wie für das Beobachten. Man soll nie mehr thun, als nöthig ist; denn bei der starken Beanspruchung des Reisenden geht jedes Ueberflüssige auf Kosten eines Nothwendigen; daher ist ein kritikloser Luxus mit der Arbeitskraft zu vermeiden. Beispielsweise ist das Rechnen mit sechsstelligen Tafeln viel zeitraubender, als das Rechnen mit fünfstelligen; wenn also die Ablesungen der getheilten Kreise nur eine Genauigkeit liefern, für welche die sechste Decimalstelle der logarithmischen Berechnung illusorisch wird, so verrichtet man eine durchaus unnütze Mehrarbeit bei der Benutzung sechsstelliger Tafeln statt der fünfstelligen und erweckt aufserdem den falschen Schein einer Genauigkeit, welche nach Lage der Dinge gar nicht vorhanden sein kann.

Da die Tafeln dekadische (Brigg'sche) Logarithmen liefern, so ist:

$$log\,10 = 1,\ \ log\,100 = 2,\ \ log\,10^i = i,\ \ log\,10^{-k} = -k;$$

ferner ist: $log\,1 = 0$, also $log\,\frac{1}{a} = -\,log\,a$.

291. Die fünfstelligen Tafeln besitzen als Argumente alle vierziffrigen Folgen, welche durch die natürlichen ganzen Zahlen 1000, 1001, ..., 9998, 9999 geliefert werden.

Eine solche Folge soll eine „Numerusfolge" heifsen; ihr entspricht mittels der Tafel eine fünfziffrige Folge M (z. B. $M = 01326$), welche „Logarithmusfolge" heifsen soll. Setzt man rechts von der ersten Zahl einer Numerusfolge das Decimalkomma oder den Decimalpunkt, so entsteht *eine zwischen 1 und 10 gelegene Decimalzahl* N; bildet man mittels der zugeordneten Logarithmusfolge M den echten Decimalbruch $0,M$, so ist *diese Zahl der Logarithmus von* N, d. h. es ist:

$$log\,N = 0,M;$$

z. B.

$$log\ 3{,}645 = 0{,}56170,$$

weil der Numerusfolge 3645 in den Tafeln die Logarithmusfolge 56170 entspricht.

Die Zahl N soll ein *Tafelnumerus* heifsen.

Wird das Decimalkomma von N um k Stellen nach *rechts* verschoben, eventuell unter Anhängen von 000..., so entsteht die Zahl $N\,10^k$. Nun ist:

$$log\,N\ 10^k = log\,N + log\,10^k = 0,M + k.$$

Beispielsweise ist:

$$log\ 364\,500{,}0 = log\ (3{,}645\,.\,10^5) = 0{,}56170 + 5.$$

Wird dagegen das Decimalkomma um k Stellen nach *links* verschoben, nachdem $\overset{1}{0}\,\overset{2}{0}\ldots\overset{k}{0}$ vor N gesetzt ist, so entsteht die Zahl $N\,10^{-k}$, und es wird:

$$log\,N\ 10^{-k} = log\,N + log\,10^{-k} = 0,M - k.$$

Für $N = 3{,}645$, $k = 5$ erhalten wir alsdann:

$$log\ 0{,}000\,036\,45 = log\ (3{,}645\,.\,10^{-5}) = 0{,}56170 - 5.$$

292. In der Darstellung:

$$log\,(N\,10^{k}) = 0{,}M + k,\quad \text{bezw.}\quad log\,(N\,10^{-k}) = 0{,}M - k$$

heifst $0{,}M$ die *Mantisse*, $+k$, bezw. $-k$ die *Kennziffer* des Logarithmus.

$1 - 0{,}M$ ist gleichfalls ein echter Decimalbruch und heifst das *Complement der Mantisse.* Die Subtraction wird „im Kopf" ausgeführt, indem man sich 1 über $0{,}M$ in der Form $1 = 0{,}9999\,(10)$ geschrieben denkt; dann gibt es nur Subtractionen von 9 und eine von 10; z. B. hat

0,34796 das Complement 0,65204.

Endet $0{,}M$ mit einer oder mehreren Nullen, so schreibt man 10 über die *letzte* von 0 verschiedene Ziffer; z. B. liefert

0,34000 das Complement 0,66000.

Ist $k = 0, 1, 2, \ldots 9$, so heifst

$10 - k{,}M$ die *dekadische Ergänzung von* $k{,}M$.

Man führt auch diese Subtraction im Kopf aus, indem man sich geschrieben denkt:

$$10 = 9{,}9999\,(10);$$

z. B. hat

3,14712 die dekadische Ergänzung 6,85288.

Ist $k = 10, 11, \ldots, 19$, so heifst $20 - k{,}M$ die Ergänzung von $k{,}M$ zu $20 = 19{,}9999\,(10)$; z. B. hat

14,68379 die Ergänzung 5,31621 zu 20.

Das Bilden von Ergänzungen zu 1, 10 und 20 kommt zur Anwendung, wenn Mantisse und Kennziffer von

$$log\,\frac{1}{a} = -\,log\,a$$

„im Kopf" mittels der Mantisse und Kennziffer von $log\,a$ hingeschrieben werden sollen; dadurch wird erreicht, dafs nur *Addition* und nie *Subtraction* von Mantissen eintritt. Zu diesem Zwecke werden die folgenden Umformungen vorgenommen, in welchen die Gleichungen 1. und 2. für jede beliebige positive und negative Kennziffer gelten, und wo 1. durch 1a., bezw. durch 1b. beim praktischen Rechnen ersetzt werden darf, desgleichen 2. durch 2a., bezw. 2b., weil die numerischen Werthe 0, 1, 2, … der Kennziffern nie den Betrag 20 überschreiten und meist unter 10 liegen.

Darstellung von $\log \frac{1}{a}$ mittels $\log a$.

293. 1. $\log a = 0,M + k$.

$\log \frac{1}{a} = -0,M - k = (1 - 0,M) - (k + 1)$.

1a. $\log a = 0,M + k = k,M$; $k = 0, 1, \ldots, 9$.

$\log \frac{1}{a} = -k,M = (10 - k,M) - 10$.

1b. $\log a = 0,M + k = k,M$; $k = 10, 11, \ldots, 19$.

$\log \frac{1}{a} = -k,M = (20 - k,M) - 20$.

2. $\log a = 0,M - k$.

$\log \frac{1}{a} = -0,M + k = (1 - 0,M) + (k - 1)$.

2a. $\log a = 0,M - k$; $k = 1, 2, \ldots, 10$; $i = 10 - k$.

$\log a = i,M - 10$.

$\log \frac{1}{a} = (10 - i,M)$.

2b. $\log a = 0,M - k$; $k = 11, 12, \ldots, 20$; $i = 20 - k$.

$\log a = i,M - 20$.

$\log \frac{1}{a} = 20 - i,M = (10 - i,M) + 10$.

Diese Gleichungen lassen sich leicht in Worten aussprechen.

Die in 1a., bezw. 1b. enthaltene Regel lautet:

Gegeben $\log a = k,M$: man bildet die Ergänzung von k,M zu 10, bezw. 20 und fügt -10, bezw. -20 hinzu.

Die Regel 2a., bezw. 2b. lautet:

Gegeben $\log a = 0,M - k$: man bildet im Kopf $i = 10 - k$, bezw. $= 20 - k$ und darauf die Ergänzung von i,M zu 10, bezw. 20.

294. Es folgen einige Beispiele, in denen wir uns denken, dafs jeder den Tafeln entnommene Werth von $\log a$ im Kopf behalten und der Werth von $\log \frac{1}{a}$ ohne Weiteres nach den gegebenen Regeln hingeschrieben wird. Je nachdem Regel 1., bezw. 2. gilt, gilt in praxi stets auch Regel 1a. oder 1b., bezw. 2a. oder 2b.

$\log a$		$\log \frac{1}{a}$
2,84607	1.	0,15393 — 3
	1a.	7,15393 — 10
0,34561	1.	0,65439 — 1
	1a.	9,65439 — 10
11,48817	1.	0,51183 — 12
	1b.	8,51183 — 20
0,00347 — 3	2.	0,99653 + 2
	2a.	2,99653
0,78309 — 14	2.	0,21691 + 13
	2b.	3,21691 + 10.

Tafellogarithmen der trigonometrischen Functionen.

295. Die fünfstelligen Tafeln liefern ferner die *Logarithmen der trigonometrischen Functionen* für alle positiven Argumente $< 90^0$, welche aus einer ganzen Anzahl von Bogenminuten bestehen. Die äufsersten Werthe der Logarithmen, welche noch in siebenstelligen Tafeln angegeben werden, liegen zwischen 0,6855749 — 6 und 5,3144251, den Werthen von $\log \sin 1''$ $= \log tg\, 1''$ und $\log ctg\, 1''$.

Um die negativen Kennziffern nicht mitführen zu müssen, ist in allen Tafeln *10 zu jeder Kennziffer addirt*, so dafs also die *Tafellogarithmen* zwischen 4,68557... und 15,31442... eingeschlossen sind. Es ist daher k,M für $k = 4, 5, \ldots, 15$ die allgemeine Form des *Tafellogarithmus* einer trigonometrischen Function $f(x)$ und

$$\log f(x) = k,M - 10,$$

$$3a. \quad \log \frac{1}{f(x)} = 10 - k,M.$$

Diese Form behält man bei für $k = 4, 5, \ldots, 9$.

Ist $k = 10, 11, \ldots, 15$, so schreibt man:

$$3b. \quad \log \frac{1}{f(x)} = (1 - 0,M) - (k - 9).$$

In Worten:

Ist k,M der Tafellogarithmus der trigonometrischen Function

$f(x)$, so bildet man $log \frac{1}{f(x)}$ für $k \leqq 9$, gemäfs 3a. aus der dekadischen Ergänzung von k,M; dagegen für $k > 9$ gemäfs 3b. aus dem Complement von $0,M$ und fügt den Ueberschufs von k über 9 negativ hinzu.

Demnach liefert:

Tafellogarithmus von $f(x)$	den $log \frac{1}{f(x)}$
6,46373	3,53627
9,18302	0,91698
10,82550	0,17450 — 1
13,23524	0,76476 — 4.

Interpolation zwischen den Tafelwerthen der fünfstelligen Logarithmentafeln.

296. Das Product einer Decimalzahl A mit 10^m, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet, heifst der *Werth von A in Einheiten der* m^{ten} *Decimale* (E. d. m^{ten} D.). Im Folgenden wird $m = 5$ gesetzt.

Es seien N und N_1 zwei auf einander folgende Tafelnumeri, z. B. 2,467 und 2,468; alsdann sind $log N = 0,M$ und $log N_1 = 0,M_1$ zwei auf einander folgende Mantissen; für das Beispiel werden sie 0,39217 und 0,39235.

$$N_1 - N \text{ ist stets } = 100 \text{ E. d. 5. D.}$$
$$log N_1 - log N = 0,M_1 - 0,M = D \text{ E. d. 5. D.}$$

Für das Beispiel ist $D = 18$.

D heifst die Tafeldifferenz und wird kleiner, wenn N gröfser wird.

N' sei ein zwischen N und N_1 gelegener Numerus, welcher um $n (= 1, 2, \ldots, 99)$ E. d. 5. D. gröfser ist als N.

Es ist also:

$$N' = N + n \text{ E. d. 5. D.}$$

Ist $n = 56$, so liefert unser Beispiel für $N = 2,467$ den Numerus $N' = 2,46756$.

Da einer Aenderung des Numerus N um 100 eine Aenderung

seines Logarithmus um D entspricht, so entspricht analog einer Aenderung um n eine proportionale Aenderung um d, folglich ist:

$$\frac{100}{D} = \frac{n}{d},$$

oder

$$d = \frac{n\,D}{100}, \qquad n = \frac{100\,d}{D}.$$

Für das mitgeführte Beispiel wird:

$$d = \frac{56.18}{100} = 10{,}08 = 10\,\ldots,$$

also folgt:

$$\begin{aligned} log\ 2{,}46756 &= 0{,}39217 + 10 \text{ E. d. 5. D.} \\ &= 0{,}39227. \end{aligned}$$

297. Die Interpolation, welche erfordert wird, wenn der Logarithmus eines sechszifferigen Numerus N' gefunden werden soll, welcher zwischen den Tafelnumeri N und N_1 liegt, ist also enthalten in der Gleichung:

$$log\ N' = log\ N + \frac{n\,D}{100} \text{ E. d. 5. D.}$$

N, n, D der rechten Seite folgen mittels der Tafeln aus N'.

Die umgekehrte Interpolation liefert den sechszifferigen Numerus N' einer zwischen zwei Tafelmantissen $0{,}M = log\ N$ und $0{,}M_1 = log\ N_1$ gelegenen Mantisse $0{,}M'$; sie ist enthalten in der Gleichung:

$$N' = N + \frac{100\,d}{D} \text{ E. d. 5. D.}$$

Ist z. B.:

$$0{,}M' = log\ N' = 0{,}70119,$$

so liefert

$$d = 5,\ D = 8,\ N = 5{,}025:$$

$$\frac{100\,.\,5}{8} \text{ E. d. 5. D.} = 0{,}00063$$

$$\text{also wird } N' = 5{,}02563.$$

298. Die beiden Interpolationen lassen sich bequem mittels der in den Tafeln gegebenen Columnen der partes proportionales ($P.\ P.$) ausführen.

P. P.	
	$D = 26$
1	2,6
2	5,2
3	7,8
4	10,4
5	13,0
6	15,6
7	18,2
8	20,8
9	23,4

Ein solches Täfelchen besitzt die nebenstehende Anordnung und liefert für jede Tafeldifferenz D die Producte von $\frac{1}{10}D$ mit bezw. 1, 2, ..., 9. Diese Producte heifsen die Proportionaltheile der Tafeldifferenz. Besteht n aus den beiden Ziffern $i\,k$, so ist $n = 10\,i + k$, also:

$$d = n\frac{D}{100} = i\frac{D}{10} + 0{,}k\,\frac{D}{10}.$$

Es ist z. B. für $n = 87$, $D = 26$: $i = 8$, $k = 7$, und es liefert die Tafel der *P. P.*:

$$d = 20{,}8 + 1{,}8 = 22{,}6 = 23 \ldots \text{E. d. 5. D.}$$

Auch umgekehrt können die *P. P.*-Tafeln dazu dienen,

$$n = \frac{100\,d}{D}$$

ohne Zeitverlust zu finden, wenn d und D gegeben sind.

Wir wollen zu diesem Zweck die PP mit $P_1, P_2, \ldots, P_9$ bezeichnen, so dafs $P_i = i\,\frac{D}{10}$, $P_k = k\,\frac{D}{10}$ ist.

Aus $n = \frac{100\,d}{D}$ bilden wir:

$$d = P_i + \frac{1}{10}\,P_k,$$

d liegt also zwischen P_i und P_{i+1}, und P_i ist durch d gegeben; aus P_i erhalten wir i durch die links daneben stehende Zahl. Die Zahl P_k ist derjenige Proportionaltheil der Tafel, welcher am nächsten an

$$P_k = 10\,(d - P_i) \ldots$$

liegt. Dadurch ist P_k gegeben und somit auch k.

Die Ziffern $i\,k$ liefern die Zahl $10\,i + k = n$.

Beispiel: $D = 26$, $d = 19$.

$$d = 19 \text{ liefert } 18{,}2 = P_7, \text{ d. h. } i = 7;$$

$$10\,(19 - 18{,}2) = 8 \text{ liefert } 7{,}8 = P_3, \text{ d. h. } k = 3.$$

Demgemäfs wird:

$$n = 10.7 + 3 = 73.$$

299. In den Logarithmentafeln der trigonometrischen Functionen sind statt der letzteren deren Winkelargumente gegeben; diese wachsen von 0° an successive um $1'$. Diesem Wachsthum von $1' = 100$ E. d. 2. D. entspricht ein Wachsthum von D E. d. 5. D. für den Logarithmus.

Ist n eine der Zahlen 1, 2, ..., 99, so entspricht einem Wachsthum von n E. d. 2. D. im Argument ein Wachsthum von $d = n \frac{D}{100}$ E. d. 5. D. im Logarithmus.

Umgekehrt entspricht einem Wachsthum des Logarithmus um d E. d. 5. D. ein Wachsthum von $n = \frac{100}{D} d$ E. d. 2. D. im Argument. Die älteren Logarithmentafeln geben die *P. P.* der Tafeldifferenz von zehntel zu zehntel Bogenminute. Bei Benutzung solcher Tafeln wird man also der Interpolation wegen gut thun, die Bogensecunden eines gegebenen Winkels in Decimalen der Minute auszudrücken.

Für unsere Zwecke besonders geeignet sind: *Th. Albrecht, Logarithmisch - Trigonometrische Tafeln mit fünf Decimalstellen, Berlin.* Dieselben enthalten nicht nur einen Anhang von häufig gebrauchten Formeln, Reihenentwickelungen, Differentialen wichtiger Functionen und von Constanten, sondern liefern auch die *P. P.* der Tafeldifferenz D (sie ist mit d bezeichnet) für $1''$, $2''$, .. $10''$, $20''$, $30''$..., $50''$. Dadurch wird Verwandlung von Bogensecunden in Decimalen der Bogenminute und umgekehrt überflüssig.

Zehnter Abschnitt.

Beispiele für das numerische Berechnen angestellter Beobachtungen.

---

300. Die im Folgenden gegebenen Beispiele, mit Ausnahme der vorangestellten Beispiele für „Zeitverwandlung“, sind den Beobachtungen entnommen, welche ich auf einer Forschungsreise in den Hohen Andes während der Jahre 1882/83 angestellt habe[1]. Als Instrument diente ein fünfzölliges Universalinstrument von Hildebrand (H. 64); ferner standen zur Verfügung ein Taschenchronometer E_χ, drei Präcisionsankeruhren E, T, E_1 und eine gewöhnliche Taschenuhr, sämmtlich für mittlere Zeit eingerichtet. Da die Reisewege Schleifen bildeten und mehrfach zu Fundamentalpunkten zurückführten, so wurden die Längenbestimmungen auf Bestimmung von Längendifferenzen durch „Zeitübertragung“ gegründet.

Zeitverwandlung.

301. Für einen Ort der östlichen Länge $-\lambda = -3^h42^m0^s$ und für 1902 Januar $27^d7^h36^m24^s$ astronomisch ($t_m = 7^h36^m24^s$) wird gesucht:

a) die Sternzeit ϑ_0 des Ortsmittags ($= AR$ der S_m),

b) die Sternzeit ϑ zu der M. Z. $7^h36^m24^s$ (astronomisch),

c) der Stundenwinkel t von β Orionis ($\alpha = 5^h9^m51^s$),

d) die Zeitgleichung ω und die wahre Zeit $t_\odot$.

Bezeichnet $\vartheta_{0,0}$ die Sternzeit für den Greenwichmittag, so ist:

---

[1]) Paul Güfsfeldt, Reise in den Andes von Chile und Argentinien. Berlin 1888.

	$\vartheta_{0,0}$	$20^h 23^m 19^s$	
	$-\lambda \Delta\alpha$	$-\ 36$	(Tafel 3, Jahrbuch 1903)
a)	ϑ_0	$20^h 22^m 43^s$	
	t_m	$7^h 36^m 24^s$	
	$t_m \Delta\alpha$	$-\ 1\ 15$	(Tafel 3, Jahrbuch)
	ϑ_0	$20\ 22\ 43$	
	ϑ	$(28\ \ 0\ 22)^0_{24}$	
b)	ϑ	$4^h\ 0^m 22^s$	
	α	$5\ \ 9\ 51$	
	$\vartheta - \alpha = t$	$(-1\ \ 9\ 29)^0_{24}$	
c)	t	$22^h 50^m 31^s$	

Bedeutet $\omega_{0,0}$, bezw. ω_0 die Zeitgleichung ω im mittleren Mittag von Greenwich, bezw. des Ortes und $\delta\omega = +0^s 5$ die stündliche Aenderung von ω, so ist:

	$\omega_{0,0}$	$+12^m 49^s$
	$-\lambda\delta\omega$	-2
	ω_0	$+12\ 47$
	$t_m \delta\omega$	$+4$
	ω	$+12^m 51^s$
	t_m	$7\ 36\ 24$
d)	$t_m - \omega = t_\odot$	$7^h\ 23^m 35^s$

302. Es sei für den Tag und den Ort der vorangehenden Nummer durch Beobachtung von Stern Alphard ($\alpha = 9^h 22^m 49^s$) im *Osten* gefunden worden:

$$\tau = 3^h 47^m 19^s.$$

Es soll daraus die mittlere Zeit t_m dieses Augenblickes abgeleitet werden gemäfs:

$$t_m = (-\tau + \alpha - \vartheta_0)^0_{24}\ \ (1 - \delta\alpha).$$

α	$9^h 22^m 49^s$	
ϑ_0	$20\ 22\ 43$	
$\alpha - \vartheta_0$	$-\ 10\ 59\ 54$	
$-\tau$	$-\ 3\ 48\ 19$	
	$(-\ 14\ 47\ 13)^0_{24}$	
	$9\ 12\ 47$	
$(9^h 12^m 47^s)\ \delta\alpha$	$-\ 1\ 31$	(Tafel 4, Jahrbuch)
t_m	$9^h 11^m 16^s$	

Indexfehler *i* des Höhenkreises.

303. Bedeuten H_r' und H_l' die verbesserten Ablesungen des Höhenkreises für dasselbe feste Object bei K. R. und K. L., so ist:

$$2\,i = 360^0 - (H_r' + H_l').$$

Beobachtung *Hacienda Vicuña 1883, Februar 14* ergab:

H_r'	83°	27′	6″
H_l'	276	50	34
	360	17	40
$2\,i$	—	17	40
i	—	8′	20″.

Es folgen nun die Rechenbeispiele für:

Polhöhe-Beobachtungen mittels der ⊙,

Zeit-Beobachtungen mittels der ⊙,

Zusammengehörige Beobachtungen zweier Fixsterne zur Bestimmung von Polhöhe und Zeit,

Beobachtungen mittels der ⊙ zur Bestimmung von terrestrischen Azimuten und des azimutalen Indexfehlers für die Aufstellung des U. I.

An Stelle der früher gebrauchten Bezeichnung U für Uhrzeit tritt die Bezeichnung der Uhr E, bezw. E_χ, mit welcher beobachtet wurde; entsprechend ändert sich die Bezeichnung für $\varDelta U$ und δU in $\varDelta E$ und δE, bezw. $\varDelta E_\chi$ und δE_χ.

Polhöhebestimmung mittels der Sonne (s. Nr. 261.).

304. *Agua de la Vida 1882, December 14, bürgerlich, Donnerstag.* $\lambda = +4^h7$, $\underline{\odot}$, Uhr E, $\Delta E + 6^m 9^s 1$. U. I. H. 64. Indexfehler $i = -6' \, 20''$. $\delta\omega = +1^s 21$. $\delta_0 = -23^0 14' 14''$. $\Delta\delta = -8'' 1$.

Satz von sechs Beobachtungen; vier derselben werden im Folgenden mitgetheilt.

Greenwich Zeitgleichung	$\omega_{0,0} - 5^m 5^s 2$	$\Delta E +$	$6^m 9^s$
$\lambda^h \delta\omega = 4{,}7.\ 1^s 21$	$+ 5\ 6$	$- \omega_0 +$	$5\ 0$
Agua de la Vida	$\omega_0 - 5^m 0^s \ldots$	$\delta E +$	$11^m 9^s$ (Uhrcorrection für wahre Zeit).

Scheinbare Zenitdistanzen z' von $\underline{\odot}$ aus den verbesserten Ablesungen bei:

	2. K. L.	3. K. R.	4. K. R.	5. K. L.
z'	$11^0\ 33'\ 44''$	$11^0\ 31'\ 59''$	$11^0\ 32'\ 57''$	$11^0\ 37'\ 52''$

Kleinstes $z' = \zeta_0'$	$11^0\ 31'\ 59''$	δ_0	$- 23^0\ 14'\ 14''$ (wahrer Mittag Greenwich).
$- ha$	$- 16\ 17$	$\lambda^h \Delta\delta$	$- 36$
$+ re$	$+ 12$	δ	$- 23\ 14\ 50$
$- pa$	$- 2$	$- \zeta_0$	$- 11\ 15\ 52$ (Nördliche Culmination.)
ζ_0	$11\ 15\ 52$	ζ_0	$- 34\ 30\ 42$

$log\ cos\,\delta$	9,9632
$log\ cos\,\varphi_0$	9,9159
$log\ (1 : sin\,\zeta_0)$	0,7092
$log\ p_0$	0,5883

	2. K. L.	3. K. R.	4. K. R.	5. K. L.
$E + \delta E$	$11^h\ 56^m 28^s$	$12^h\ 0^m 17^s$	$12^h\ 2^m 56^s$	$12^h\ 6^m 47^s$
τ	3 32	0 17	2 56	6 47
$\log \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \tau}{\sin 1''}$	1,3894	0,197 — 1	1,2277	1,9559
$\log p_0$	0,5883	0,588	0,5883	0,5883
$\log x''$	1,9777	0,785 —1	1,8160	2,5442
x''	1′ 35″	1″	1′ 6″	5′ 50″
z'	11° 33′ 44″	11° 31′ 59″	11° 32′ 57″	11° 37′ 52″
$z' - x$	11 32 9	11 31 58	11 31 51	11 32 2
$- ha + re - pa$	—16 7	—16 7	—16 7	—16 7
ζ	11 16 2	11 15 51	11 15 44	11 15 55

K. L. 2	11° 16′ 2″
K. L. 5	11 15 55
Mittel ζ K. L.	11 15 59
K. R. 3	11 15 51
K. R. 4	11 15 44
Mittel ζ K. R.	11 15 48
Gesammtmittel K. L., K. R. —ζ —	11° 15′ 54″
δ —	23 14 50
Resultat: *Polhöhe* Agua de la Vida φ —	34° 30′ 44″

Zeitbestimmung mittels der Sonne (s. Nr. 237., 238., 240.).

305. *Agua de la Vida 1882. December 20, bürgerlich, Mittwoch;* $\lambda = + 4^h 7$. Gestirn ☉ im Osten, Uhr $E\chi$. Universalinstrument H. 64.; Indexfehler $i = - 6' 0''$.

Die gegebenen Werthe von z sind bereits reducirt auf den Mittelpunkt der Sonne und von Refraction und Parallaxe befreit.

Der Werth von $\varphi = - 34^0 30' 44''$ ist den Beobachtungen December 14 entnommen.

Declination δ ist entsprechend Länge $+ 4^h 7$ und der genäherten Ortszeit berechnet. Die Länge ist durch Zeitübertragung aus der Länge von Santiago de Chile abgeleitet.

φ	$-34^0\ 30'\ 44''$	$\log(1:\cos\varphi)$	0,08407
δ	$-23\ \ 26\ \ 44$	$\log(1:\cos\delta)$	0,03742
$\varphi - \delta$	$-11\ \ \ 4\ \ \ 0$	$\log(1:\cos\varphi\cos\delta)$	0,12149
$\frac{1}{2}(\varphi \sim \delta)$	5 32 0		

Bezeichnung: $\frac{1}{2}[z + (\varphi \sim \delta)] = [+]$ $\frac{1}{2}[z - (\varphi \sim \delta)] = [-]$

	1. K. R.	2. K. L.	3. K. L.	4. K. R.
z	$38^0\ 51'\ 17''$	$38^0\ 9'\ 21''$	$37^0\ 18'\ 43''$	$36^0\ 8'\ 46''$
$\frac{1}{2}z$	19 25 39	19 4 41	18 39 22	18 4 23
$\frac{1}{2}(\varphi \sim \delta)$	5 32 0	5 32 0	5 32 0	5 32 0
[—]	13 53 39	13 32 41	13 7 22	12 32 23
[+]	24 57 39	24 36 41	24 11 22	23 36 23

$log\ sin\ [-]$		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
$log\ sin\ [+]$		9,62531	9,61957	9,61252	9,60254	K. R. 1	$0^m 25^s 3$
$log\ (1 : cos\ \varphi\ cos\ \delta)$		0,12149	0,12149	0,12149	0,12149	K. R. 4	0 25 3
$log\ sin^2 \frac{1}{2}\tau$		9,12725	9,11065	9,09011	9,06072	Mittel K. R.	0 25 3
$log\ sin \frac{1}{2}\tau$		9,56363	9,55533	9,54506	9,53036		
$\frac{1}{2}\tau$		21° 28′ 28″	21° 3′ 1″	20° 32′ 9″	19° 49′ 25″	K. L. 2	0 25 9
τ^0		42 56 56	42 6 2	41 4 18	39 38 50	K. L. 3	0 25 2
τ^h Ost	—	$2^h 51^m 47^s 7$	$2^h 48^m 24^s 1$	$2^h 44^m 17^s 2$	$2^h 38^m 35^s 3$	Mittel K. L.	0 25 5
Wahre bürg. Zeit $t_\odot$ V.		9 8 12 3	9 11 35 9	9 15 42 8	9 21 24 7		
Uhrzeit $E\chi$		9 5 41 0	9 9 4 0	9 13 11 6	9 18 53 4	*Gesammtm.* K. R., K. L.	
$t_\odot - E\chi$	+	0 2 31 3	0 2 31 9	0 2 31 2	0 2 31 3	*Uhrcorrection*	
$t_m - t_\odot = \omega$		—2 6 0	—2 6 0	—2 6 0	—2 6 0	$\varDelta E\chi = +$	$0^m 25^s 4$
$t_m - E\chi = \varDelta E\chi$	+	0 25 3	0 25 9	0 25 2	0 25 3		

Es liegen Zeitbestimmungen vor für Agua de la Vida 1882 vom December 12 zu der nämlichen Tageszeit. Die drei Reiseuhren $E\chi$ (Chronometer), E und T wurden an beiden Tagen sorgfältig verglichen. Es ergab sich:

	$\varDelta E\chi$	$\varDelta E$	$\varDelta T$
December 20.	$+0^m 25^s 4$	$+ 7^m 16^s 4$	$- 1^m 55^s 3$
December 12.	+0 24 6	+ 5 44 1	— 1 3 2
$\varDelta U - \varDelta U_0$ in acht Tagen	+0 8	+ 1 32 3	— 0 52 1
Täglicher Gang	$+0^s 1$	$+ 11^s 54$	$- 6^s 51$

Beobachtungen zweier Fixsterne zur gleichzeitigen Bestimmung der Polhöhe und der Zeit.

306. Diese Beobachtungen wurden in der Nacht zwischen zwei Marschtagen angestellt, beim Niederstieg von der centralen Cordillere zu dem oberen Rande der argentinischen Pampas. Die Caravane bestand aus 4 eingeborenen Begleitern, 10 Pferden, 7 Maulthieren.

a) Polhöhebestimmung (s. Nr. 258.—260.).

Ranchito-Biwak 1883, Januar 11., Donnerstag.

Universalinstrument H. 64.; Indexfehler $i = -6' \, 10''$; genäherte Länge $\lambda = +4^h 6$. Uhr E.

Stern *Aldebaran* (α Tauri). Circummeridian-Beobachtungen. $\alpha = 4^h 29^m 14^s 6$, $\delta = +16^0 \, 16' \, 20''$.

Culmination *nördlich*. Kleinste der beobachteten Zenitdistanzen $\zeta_0' + re = \zeta_0 = 50^0 \, 58' \, 5''$, also:

$\delta - \zeta_0 = \varphi_0 -$	$34^0 41' 45''$	$log\ cos\ \varphi_0$	9,9149	$\vartheta_{0,0}$	$19^h 22^m 36^s 6$
δ	$+$ 16 16 20	$log\ cos\ \delta$	9,9823	$\lambda \Delta \alpha$	0 46 1
ζ_0	50 58 5	$log\ (1 : sin\ \zeta_0)$	0,1097	ϑ_0	19 23 22 7
		$log\ p_0$	0,0069	α	4 29 14 6
				$\vartheta_0 - \alpha$	$+$ 14 54 8 1

Mittels φ_0 ist die Uhrcorrection aus der in Nr. 307 gegebenen *Procyon*-Beobachtung berechnet worden; sie hat für Uhr E ergeben: $\Delta E = +16^m 13^s$.

	1. K. L.	2. K. R.	3. K. R.	4. K. R.	5. K. L.	6. K. L.
$E + \Delta E = t_m$	$8^h 56^m 45^s$	$8^h 59^m 45^s$	$9^h \ 3^m 30^s$	$9^h \ 5^m 41^s$	$9^h \ 8^m 23^s$	$9^h 11^m 24^s$
$\Delta \alpha \, t_m$	1 28	1 29	1 29	1 30	1 30	1 31
$t_m (1 + \Delta \alpha)$	8 58 13	9 1 14	9 4 59	9 7 11	9 9 53	9 12 55

$\vartheta_0 - \alpha$	+ 14 54 8	14 54 8	14 54 8	14 54 8	14 54 8	14 54 8
t	23 52 21	23 55 22	23 59 7	24 1 19	24 4 1	24 7 3
τ	7 39	4 38	0 53	1 19	4 1	7 3
$\log \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \tau}{\sin 1''}$	2,0603	1,6248	0,1853	0,5320	1,5008	1,9894
$\log p_0$	0,0069	0,0069	0,0069	0,0069	0,0069	0,0069
$\log x''$	2,0672	1,6317	0,1922	0,5389	1,5077	1,9963
x''	117″	43″	2″	3″	32″	99″
z'	50° 59′ 0″	50° 58′ 8″	50° 57′ 1″	50° 57′ 23″	50° 57′ 41″	50° 58′ 34″
$z' - x = \zeta'$	50 57 3	50 57 25	50 56 59	50 57 20	50 57 9	50 56 55

	1. 50° 57′ 3″		2. 50° 57′ 25″				
	5. 57 9		3. 56 59	Mittel	K. L.	50° 57′ 2″
	6. 56 55		4. 57 20	„	K. R.	50 57 15
Mittel ζ' K. L.	50 57 2	K. R.	50 57 15	Gesammtmittel	ζ'	50 57 9

Gesammtmittel	ζ'	50° 57′ 9″
	re +	1 5
Nördliche Meridian-Zenitdistanz	$-\zeta$	− 50 58 14
	δ	+ 16 16 20
Gesuchte Polhöhe	φ	− 34° 41′ 54″

b) *Zeitbestimmung* (s. Nr. 237., 238.).

307. *Ranchito-Biwak 1883, Januar 11. (Fortsetzung.)*

Gestirn *Procyon* (α Canis minoris); im Osten. Uhr $E\chi$.

α	$7^h 33^m 12^s 9$	δ	$+\ 5^0 31' 12''$	$log(1:cos\,\delta)$	0,00202
ϑ_0	19 33 22 9	φ_0	$-\ 34\ 41\ 45$	$log(1:cos\,\varphi)$	0,08503
$\alpha - \vartheta_0$	$-\ 11\ 50\ 10\ 0$	$(\varphi_0 \sim \delta)$	40 12 57	$log(1:cos\,\varphi\ cos\,\delta)$	0,08705
		$\frac{1}{2}(\varphi \sim \delta)$	$20^0\ 6' 28''$		

$[-]$ soll bedeuten $\frac{1}{2}[z - (\varphi \sim \delta)]$; $[+]$ soll bedeuten $\frac{1}{2}[z + (\varphi \sim \delta)]$.

Die Zenitdistanzen z sind aus den verbesserten Ablesungen mittels des Indexfehlers $i = -\ 6' 10''$ abgeleitet und von Refraction befreit. Statt der Secunden werden beispielshalber zweistellige Decimalbrüche der Minuten geschrieben, der Interpolation wegen. Albrecht's Tafeln ersparen diese Mühe.

	1. K. L.	2. K. L.	3. K. R.	4. K. R.
z	$54^0 47' 82$	$54^0 21' 48$	$53^0 30' 73$	$53^0\ 5' 40$
$\frac{1}{2} z$	27 23 91	27 10 74	29 45 37	26 32 70
$\frac{1}{2}(\varphi \sim \delta)$	20 6 47	20 6 47	20 6 47	20 6 47
$[-]$	7 17 47	7 4 27	6 38 90	6 26 23
$[+]$	47 30 38	47 17 21	46 51 84	46 39 17
log sin $[-]$	9,103 47	9,090 27	9,063 61	9,049 66
log sin $[+]$	9,867 68	9,866 14	9,863 17	9,861 66

$log(1:cos\,\varphi\;cos\,\delta)$	0,087 05	0,087 05	0,087 05	0,087 05
$log\;sin^2\frac{1}{2}\tau$	19,058 20	19,043 46	19,013 83	18,998 37
$log\;sin\frac{1}{2}\tau$	9,529 10	9,521 72	9,506 92	9,499 19
$\frac{1}{2}\tau$	19° 45′ 83	19° 25′ 06	18° 44′ 51	18° 47′ 97
τ^0	39 31 66	38 50 12	37 29 02	36 47 94
τ^0 Ost	39° 31′ 40″	38° 50′ 7″	37° 29′ 1″	36° 47′ 56″
$-\tau^h$	$-$ 2^h 38^m 6^s 7	2^h 35^m 20^s 5	2^h 29^m 56^s 1	2^h 27^m 11^s 8
$\alpha - \vartheta_0$	$-$11 50 10 0	11 50 10 0	11 50 10 0	11 50 10 0
$-\tau + \alpha - \vartheta_0$	$-$14 28 16 7	14 25 30 5	14 20 6 1	14 17 21 8
$(-\tau + \alpha - \vartheta_0)^0_{24}$	+ 9 31 43 3	9 34 29 5	9 39 53 9	9 42 38 2
Reduction St. Z. auf M. Z.	—1 33 7	—1 34 1	—1 35 0	—1 35 5
Mittlere Zeit t_m	9 30 9 6	9 32 55 4	9 38 18 9	9 41 2 7
Uhr $E\chi$	9 13 32 6	9 16 18 2	9 21 39 0	9 24 21 2
$\varDelta E\chi$	+16^m 37^s 0	+16^m 37^s 4	+16^m 39^s 9	+16^m 41 5

K. L. 1.	+16^m 37^s 0	K. R.	+16^m 39^s 9	Mittel K. L.	+16^m 37^s 2
K. L. 2.	16 37 4	K. R.	16 41 5	K. R.	+16 40 7
Mittel K. L.	+16 37 2	Mittel K. R.	+16 40 7	*Uhrcorrection*	+16^m 39^s 0

Durch Uhrvergleichung von $E\chi$ und E folgt: $\varDelta E + 16^m 13^s 0$, und dieser Werth von $\varDelta E$ ist bei der Berechnung der *Aldebaran*-Beobachtungen (Nr. 306.) gebraucht worden. Beide Beobachtungen wurden zwischen $8^h 30^m$ und $9^h 30^m$ N. (Uhrzeit E) erhalten.

Bestimmung von ΔA und von Azimuten (s. Nr. 265. — 270.).

308. *Banos de Cauquenes 1882, December 27., Mittwoch. Gestirn* ⊙ *im Westen.* Universal-Instrument H. 64; Uhr $E\chi$; Correction $\delta E\chi$ gegen wahre Zeit = — $0^m 29^s 0$. *Ferne Bergspitze G*: Mittel der Ablesungen bei K. R. und K. L. *vor* den Beobachtungen 266° 18′ 39″,
nach den Beobachtungen 266 18 28.

Die Beobachtungen fanden statt im Westen bei niedrigem Sonnenstande, vier für |⊙, vier für ⊙|.

Es war für:	1. K. R.	2. K. L.	3. K. L.	4. K. R.
Wahre Zeit $E\chi + \delta E\chi = t_\odot$	$5^h 39^m 29^s$	$5^h 42^m 21^s$	$5^h 44^m 44^s$	$5^h 47^m 10^s$
Ablesung für |⊙	122° 37′ 6″	122° 16′ 19″	121° 58′ 38″	121° 40′ 41″

Es wird berechnet $\alpha' - \varkappa$ und $\alpha' + \varkappa$ aus:

$$tg\,\frac{1}{2}(\alpha' - \varkappa) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi + \delta)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi - \delta)}\,tg\,\frac{1}{2}\tau;\quad tg\,\frac{1}{2}(\alpha' + \varkappa) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi + \delta)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi - \delta)}\,tg\,\frac{1}{2}\tau.$$

Da die ⊙ im Westen stand, so ist $\tau = t_\odot$, $\alpha' = a$ (Azimut)

δ — 23° 18′ 33″	$\frac{1}{2}\delta$ — 11° 39′ 17″	$\frac{1}{2}(\varphi + \delta)$ — 28° 46′ 30″
φ — 34 14 25	$\frac{1}{2}\varphi$ — 17 7 13	$\frac{1}{2}(\varphi - \delta)$ — 5 27 56

28° 46′ 30″:	*log sin*	9,682 48	*log cos*	9,942 76
5° 27′ 56″:	*log* (1 : *cos*)	0,001 98	*log* (1 : *sin*)	1,021 15
	log F_1	9,684 46 *n.*	*log* F_2	0,963 91 *n.*

τ^h	$5^h 39^m 29^s$	$5^h 42^m 21^s$	$5^h 44^m 44^s$	$5^h 47^m 10^s$
$\frac{1}{2}\tau^h$	2 49 45	2 51 11	2 52 22	2 53 35
$\frac{1}{2}\tau^0$	42° 26′ 15″	42° 47′ 45″	43° 5′ 30″	43° 23′ 45″

$log\ F_1$	9,68446 n	9,68446	9,68446	9,68446
$log\ tg \frac{1}{2} (\alpha' - \varkappa)$	9,64556 n	9,65102	9,65551	9,66013
$-\frac{1}{2} (\alpha' - \varkappa)$	24° 51′ 8″	24° 7′ 10″	24° 20′ 30″	20° 34′ 20″
$log\ tg \frac{1}{2} \tau^0$	9,96110	9,96656	9,97105	9,97567
$log\ F_2$	0,96391 n	0,96391	0,96391	9,96391
$log\ tg \frac{1}{2} (\alpha' + \varkappa)$	0,92501 n	0,930047	0,93496	0,93958
$180^0 - \frac{1}{2} (\alpha' + \varkappa)$	83° 13′ 20″	83° 18′ 24″	83° 22′ 40″	83° 26′ 40″
$\frac{1}{2} (\alpha' + \varkappa)$	96 46 40	96 41 36	96 37 32	96 33 20
$\frac{1}{2} (\alpha' - \varkappa)$	— 23 51 8	24 7 10	24 20 30	24 34 20
$\alpha' = a$	72 55 32	72 34 26	72 17 2	71 59 0

$h\,a$ = Halbmesser der ⊙ 16′ 18″. Die Reduction auf den Mittelpunkt ist 16′ 33″; denn es war die mittlere Zenitdistanz der ⊙ für beide Beobachtungssätze 80°; $h\,a\ cosec\,80^0 = 16' 33''$.

	1. K. R.	2. K. L.	3. K. L.	4. K. R.
Ablesungen |⊙	122° 37′ 6″	122° 16′ 19″	121° 58′ 38″	121° 40′ 41″
$h\,a\ cosec\ z$	+ 16 33	16 33	16 33	16 33
Ablesungen ⊙ = A	122 53 39	122 32 52	122 15 11	121 57 14
Azimute a	72 55 32	72 34 26	72 17 2	71 59 0
$a - A = \varDelta A$	— 49 58 7	— 49 58 26	— 49 58 9	— 49 58 14

1.	K. R.	$-49^{0}\,58'\,7''$	2.	K. L.	$-49^{0}\,58'\,26''$	Mittel	K. R.	$-49^{0}\,58'\,11''$
4.	K. R.	$-49\ 58\ 14$	3.	K. L.	$-49\ 58\ 9$	„	K. L.	$-49\ 58\ 18$
Mittel	K. R.	$-49\ 58\ 11$	Mittel	K. L.	$-49\ 58\ 18$	$\varDelta A$ Mittel I		$-49\ 58\ 15$

Es liegen nun noch vier weitere Beobachtungen vor für ⊙|; sie sind in derselben Weise berechnet und haben ergeben:

	5. K. R.	6. K. L.	7. K. L.	8. K. R.
$\alpha - A = \varDelta A$	$-49^{0}\,58'\,20''$	$-49^{0}\,58'\,21''$	$-49^{0}\,58'\,25''$	$-49^{0}\,58'\,29''$

5.	K. R.	$-49^{0}\,58'\,20''$	6.	K. L.	$-49^{0}\,58'\,21''$	Mittel	K. R.	$-49^{0}\,58'\,25''$
8.	K. R.	$-49\ 58\ 29$	7.	K. L.	$-49\ 58\ 25$	„	K. L.	$-49\ 58\ 23$
Mittel	K. R.	$-49\ 58\ 25$	Mittel	K. L.	$-49\ 58\ 23$	$\varDelta A$ Mittel	II	$-49\ 58\ 24$

Mittel I	$-49^{0}\,58'\,15''$
Mittel II	$-49\ 58\ 24$
Gesammtmittel $\varDelta A$	$-49^{0}\,58'\,20''$
Ablesungsmittel Bergspitze G	$266\ 18\ 34$
Azimut G = *Ablesung* $G + \varDelta A$	$216^{0}\,20'\,14''$

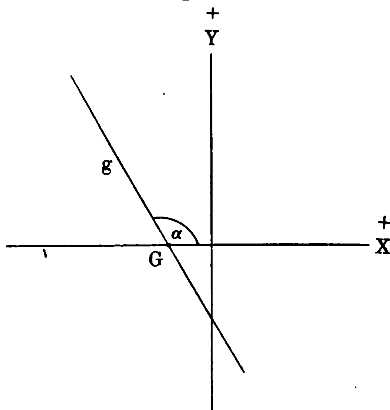
Elfter Abschnitt.

Meridianellipse und Gestirns-Parallaxe.

Richtungsangabe einer Geraden in der Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems.

309. Es sei ein rechtwinkliges Coordinatensystem XY gegeben. Eine beliebige Gerade g der Ebene XY schneide die X-Axe in dem Punkte G. Von den beiden Strahlen, in welche g durch G zerfällt wird, enthält der eine alle Punkte von g, deren *Ordinaten positiv* sind; er soll der *Richtungsstrahl der Geraden g* heifsen. Der Winkel α, welchen dieser Strahl mit der *positiven* Richtung von X bildet, soll der *Richtungswinkel* und $tg\,\alpha = a$ die *trigonometrische Richtungstangente* von g heifsen.

Fig. 86.



310. Sind x, y und X, Y zwei Punkte der Geraden g so ist stets:

$$\frac{y - Y}{x - X} = \frac{Y - y}{X - x} = tg\,\alpha = a.$$

Da α spitz oder stumpf sein kann, so kann entsprechend $tg\,\alpha$ positiv oder negativ sein. $tg\,\alpha$ wird also die Werthe aller positiven und negativen Zahlen annehmen, wenn die Gerade g um G gedreht wird. Die vorstehende Gleichung wird durch *alle* Punkte X, Y der Geraden g befriedigt und *nur* durch solche.

Es ist also allgemein:

$$\frac{Y - y}{X - x} = a$$

die *Gleichung der Geraden g* (vergl. Nr. 67., Ende). welche durch

den Punkt x, y geht und deren Richtungstangente den Werth a besitzt; $a = tg\,\alpha$ liefert eindeutig den Richtungswinkel α, weil $\alpha < 180^0$ ist.

Legt man durch den Punkt x, y die Normale n von g, und ist α' der Richtungswinkel von n, so ist $\alpha' = \alpha - 90^0$, wenn α *stumpf* ist, und $\alpha' = \alpha + 90^0$, wenn α *spitz* ist, folglich ist stets:

$$tg\,\alpha\, tg\,\alpha' = -1.$$

Es ist also:

$$\frac{Y-y}{X-x} = -\frac{1}{a}$$

die Gleichung der Geraden n, welche *normal zu der Geraden g liegt* und mit *derselben den Punkt x, y gemein hat.*

Tangente und Normale einer Curve.

311. Ist die Gleichung einer Curve in der Form:

$$y = f(x)$$

dargestellt, so folgt aus dem Taylor'schen Satz (Nr. 278.):

$$y + \delta y = f(x + \delta x) = f(x) + \delta x\, f'(x) + \frac{\delta x^2}{1.2} f''(x) + \cdots$$

Wird δx verschwindend klein, so wird (Nr. 274., 275.):

$$y + dy = f(x) + dx f'(x),$$

$$dy = dx\, f'(x), \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Die Gleichung

$$\frac{Y-y}{X-x} = f'(x)$$

ist die Gleichung einer Geraden, welche den Curvenpunkt x, y enthält und durch den Curvenpunkt

$$Y = y + dy, \qquad X = x + dx,$$

befriedigt wird; denn für diese Coordinaten geht sie über in die Identität $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Die Gerade wird also durch die Punkte des *Curvenelementes* befriedigt, welches durch x, y festgelegt ist. Eine Gerade, welche mit einer Curve in dem Punkte x, y derselben ein verschwindendes *Streckenelement* gemein hat, heifst die *Tangente der Curve im Punkte x y.*

Die Gerade n, welche normal zur Curventangente t durch

den Berührungspunkt x, y derselben gelegt wird, heifst die *Normale der Curve im Punkte* x, y; folglich ist (Nr. 310.):

$$\frac{Y-y}{X-x}=-\frac{1}{f'(x)}$$

die *Gleichung der Curvennormale im Punkte* x, y.

Anwendung auf die Ellipse.

312. Handelt es sich um eine Ellipse, und ist $y=f(x)$ in der Form (Nr. 67., 2) gegeben:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

so liefern die Regeln für die Bildung der Ableitung $y'=f'(x)$:

$$f'(x)=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Es ist also:

$$\frac{Y-y}{X-x}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

die *Gleichung der Ellipsentangente im Ellipsenpunkte* x, y und:

$$\frac{Y-y}{X-x}=\frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}$$

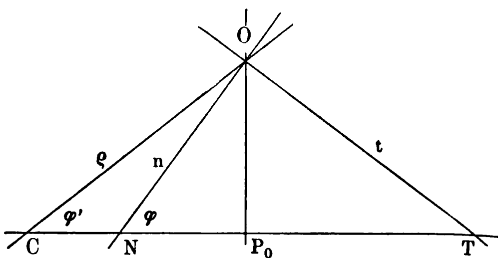
die *Gleichung der Ellipsennormale im Ellipsenpunkte* x, y.

313. Es seien (Fig. 87) O ein Punkt der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

C ihr Mittelpunkt, t die Tangente in O, n die Normale in O, T und N die Schnittpunkte von t und n mit der grofsen Axe, $\overline{CO}=\varrho$ der Radius von O, φ' die *Neigung* des Radius, φ die *Neigung* der Normale n gegen die X-Axe.

Fig. 87.



Also sind φ' und φ *gleichzeitig* entweder *gleich* oder *supplementär* den Richtungswinkeln der Geraden CO und NO. Die Richtungstangente des Radius CO ist $\frac{y-o}{x-o}=\frac{y}{x}$; diejenige der Ellipsennormale in O ist $\frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}$, also ist entweder:

$$tg\,\varphi' = \frac{y}{x} \text{ und } tg\,\varphi = \frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x},$$

oder:

$$tg\,\varphi' = -\frac{y}{x} \text{ und } tg\,\varphi = -\frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x},$$

also in beiden Fällen:

1. $$tg\,\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\,tg\,\varphi.$$

Ferner ist (Nr. 55.)

$$x^2 = \varrho^2 \cos^2\varphi',\; y^2 = \varrho^2 \sin^2\varphi'.$$

Setzt man diese Ausdrücke ein in unsere Ellipsengleichung, so entsteht unter Berücksichtigung von $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$ (Nr. 141.) die Polargleichung der Ellipse:

2. $$\varrho^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\varphi'}$$

und auch unter Anwendung von 1. und $\sin^2\varphi' + \cos^2\varphi' = 1$:

3. $$\varrho^2 = \frac{a^4 \cos^2\varphi + b^4 \sin^2\varphi}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}.$$

Es ist also ϱ^2 einmal durch φ', das andere Mal durch φ ausgedrückt. Durch Vermittelung der Ausdrücke, welche sich für $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}$ und $\cos(\varphi - \varphi')$ aufstellen lassen, erhält man auch:

4. $$\varrho^2 = \frac{a^2 \cos\varphi}{\cos\varphi' \cos(\varphi - \varphi')}.$$

Anwendung auf die Meridianellipse.

314. Unter der *verbesserten* oder *geocentrischen Breite* eines Erdortes O versteht man die Neigung des Erdradius von O gegen die Aequatorebene mit dem Zeichen der geographischen Breite von O. Läfst man die vorstehend betrachtete Ellipse in die *Meridianellipse* übergehen, so bedeuten φ und φ' zunächst nur die numerischen *Werthe der geographischen Breite und der geocentrischen Breite.* Da die Gleichungen 1. bis 4. aber ungeändert bleiben, wenn man gleichzeitig φ und φ' mit dem negativen Zeichen versieht, so gelten sie direct für nördliche wie für südliche Breiten.

Die Gleichung 1. der Nr. 313. zeigt die analytische Abhängigkeit, in welcher φ und φ' stehen; sie ist enthalten in der Form:

$$tg\,y = n\,tg\,x.$$

Wenn nun eine Zahl y von einer Zahl x in der vorstehenden Weise abhängt und $q = \frac{n+1}{n-1}$ gesetzt wird, so ist, nach den Untersuchungen der Analysis, y in folgender Weise durch x darstellbar:

$$y = x + q \sin 2x + \frac{1}{2} q^2 \sin 4x \cdots + \frac{1}{m} q^m \sin (2mx) \cdots$$

Wendet man dies auf die Meridianellipse an, indem man setzt:

$$y = \varphi', x = \varphi, \quad n = \frac{b^2}{a^2}, \quad n - 1 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}, \quad n + 1 = \frac{b^2 + a^2}{a^2}$$

$$a = 6\,377\,397 \text{ m} \qquad b = 6\,356\,079 \text{ m}, \quad \text{(Nr. 69.)}$$

so erhält man:

$$\varphi' = \varphi - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 \sin 4\varphi - \cdots$$

oder:

$$\varphi - \varphi' = 690''6489 \sin 2\varphi - 1''1563 \sin 4\varphi + 0''0026 \sin 6\varphi \ldots$$

(Albrecht, *Formeln* . . ., S. 115.)

Desgleichen gestattet Gleichung 3. der Nr. 313. die Entwickelung einer Reihe für $\log \varrho$, welche die Form hat:

$$\log \varrho = A + B \cos 2\varphi - C \cos 4\varphi \ldots$$

und auf Grund der Werthe von a und b so stark convergirt, dafs man für $\log \varrho$ (Einheit des Meters) setzen darf:

$$\log \varrho = 6{,}803\,91820 + 0{,}000\,72709 \cos 2\varphi - 0{,}000\,00183 \cos 4\varphi.$$

In Albrecht, Tafel 35b, sind für die Werthe 0° bis 65° der geographischen Breite φ von Grad zu Grad, bezw. von 10 zu 10 Bogenminuten die Werthe für $\varphi - \varphi'$ und $\log \varrho$ gegeben. Der Erdradius der Breite φ ist hier auf die Einheit des Aequatorradius a bezogen, die Werthe von ϱ sind also kleiner als 1.

Bei allen Rechnungen, welche der Parallaxe wegen angestellt werden müssen, bedarf man der Werthe von $\log \varrho$ und $\varphi - \varphi'$ für den Beobachtungsort der Breite φ.

Von der Parallaxe.

315. Der allgemeine Begriff der Parallaxe ist bereits früher erörtert worden; wir verstanden darunter den Winkel der beiden Visirstrahlen, welche von zwei beliebigen Punkten C und O nach demselben Object (S) gezogen wurden.

Für diejenige Parallaxe, von welcher nunmehr ausschliefslich die Rede sein soll, ist das Object (S) ein *Gestirn*, C der *Erdmittelpunkt*, O ein *beliebiger Erdort*; sie hat den Namen *Höhenparallaxe* (Nr. 76.). Wäre die Erde genau von Kugelgestalt, so würde der Unterschied der Höhenwinkel, welche die vom Erdmittelpunkt und von dem Erdort gezogenen Visirlinien des Gestirns in Bezug auf den Horizont besitzen, gleich der Parallaxe sein.

Es bedeute (Fig. 88) C das Erdcentrum und O einen Erdort vom Radius $\overline{CO} = \varrho$; (S) ein Gestirn, für welches $\overline{C(S)} = \Delta$ ist. Der Schnittpunkt des Strahles CO mit der Himmelskugel heifst *das geocentrische Zenit* Z', und der Winkel $Z'O(S) = z'_p$ heifst die *scheinbare*, der Winkel $Z'C(S) = z'$ *die wahre geocentrische Zenitdistanz* des Sternes (S).

Fig. 88.

Nach dem Sinussatz der ebenen Trigonometrie wird:

$$\frac{\varrho}{\Delta} = \frac{\sin p}{\sin z'_p}$$

$$\sin p = \frac{\varrho}{\Delta} \sin z'_p.$$

Hat der Stern die Lage S_0, d. h. ist $\angle Z'OS_0$ ein *Rechter* und ist π die Parallaxe von S_0, so wird $\sin z'_p = 1$ und

$$1. \quad \frac{\varrho}{\Delta} = \sin \pi$$

also:

$$2. \quad \sin p = \sin \pi \, \sin z'_p.$$

π heifst die *Horizontalparallaxe* des Sterns (S) in Bezug auf den Ortsradius ϱ, weil S_0 genau im Horizont des Ortes liegen würde, wenn das geocentrische Z' und das wahre Zenit Z zusammenfielen. Ist $\varrho = a$ ein Aequatorradius, so heifst π die *äquatoriale Horizontalparallaxe.*

316. Die Abweichung der Erdfigur von der Kugelgestalt bedingt aber, dafs Z und Z' den Abstand $\varphi \sim \varphi'$ haben.

Fig. 89.

In der Fig. 89 bedeute O einen Erdort, P den gleichstimmigen Erdpol, CA den Aequatorradius des oberen Meridianflügels von O. Die Schwererichtung von O sei ON, der Ortsradius CO. O und

N liegen stets auf *entgegengesetzten* Seiten des Aequators. Der Parallelstrahl von NO durch das Erdcentrum C trifft die Himmelskugel im wahren Zenit Z, während der Radius CO das geocentrische Zenit Z' bestimmt. *Z' liegt also stets im oberen Meridian von Z und stets auf der Aequatorseite von Z.* Da φ numerisch $= \angle\, AN_0O$ und φ' numerisch $= \angle\, ACO$, so ist $\angle\, CON = \varphi \sim \varphi'$; also besitzen auch die Punkte Z und Z' der Himmelskugel den Abstand $\varphi \sim \varphi'$.

317. Der Stern (S) (Fig. 90), dessen Parallaxe betrachtet wird, und der Erdradius CO bestimmen in jeder Lage eine Ebene. Diese enthält die von O und C gezogenen Visirstrahlen des Sterns, also auch den Parallelstrahl von $O(S)$ durch C. Die Ebene trifft die Himmelskugel in einem gröfsten Kreise, welcher durch Z' und den durch $C\,(S)$ gelieferten „Stern" S der Himmelskugel geht; dieser Kreis wird von dem Radius der Richtung $O\,(S)$ in einem Punkte S_p getroffen. Wir nannten denselben (Nr. 76.) das *parallaktische Gestirn* im Gegensatz zu „Stern" S, welcher das *wahre Gestirn* heifsen soll. Aus der Zeichnung geht ohne Weiteres hervor, dafs die geocentrische Zenitdistanz z'_p des parallaktischen Gestirns um die Parallaxe p *gröfser* ist als die geocentrische Zenitdistanz z' des wahren Gestirns, d. h. es ist:

Fig. 90.

$$z'_p = z' + p.$$

Die gegenseitige Lage von $ZZ'SS_p$ ist also durch Fig. 91 dargestellt, auf welcher die Bogen $\widehat{ZZ'} = \varphi \sim \varphi'$ und $\widehat{SS_p} = p$ auf das stärkste übertrieben sind. Denn P soll den sichtbaren Pol von Z, und A_μ den Aequatorpunkt des oberen Meridians von Z bedeuten, also $\widehat{PA_\mu}$ einen Quadranten. In der Zeichnung ist:

Fig. 91.

$\widehat{ZS} = z$ die wahre Zenitdistanz des wahren Gestirns,

$\widehat{ZS_p} = z_p$ die wahre Zenitdistanz des parallaktischen Gestirns,

$\widehat{Z'S} = z'$ die geocentrische Zenitdistanz des wahren Gestirns.

$\widehat{Z'S_p} = z'_p$ die geocentrische Zenitdistanz des parallaktischen Gestirns.

Die Zeichnung macht es anschaulich, dafs die Verticalkreise von S und S_p *nicht* zusammenfallen, dafs also beide Gestirne für denselben Zeitmoment *verschiedene Azimute* a und a_p besitzen, so wie sie auch verschiedene Zenitdistanzen z und z_p besitzen. Nur wenn das Gestirn in der oberen Culmination steht, fallen beide Verticalkreise in den Meridian. Die Stellung des parallaktischen Gestirns gegen das wahre wird sich fortwährend ändern. S_p verbleibt dabei auf dem in steter Drehung begriffenen Z'-Vertical von S; sein Abstand p von S ändert sich dabei nach Mafsgabe der Gleichung $\sin p = \sin \pi \sin z'_p$.

318. Es ist nun die wichtigste Aufgabe der Parallaxentheorie, die sphärischen Coordinaten des parallaktischen Gestirns aus denen des wahren Gestirns, und umgekehrt, für unsere verschiedenen Coordinatensysteme abzuleiten.

Nennen wir α die Abscisse, ω die Ordinate des wahren Gestirns, so sollen α_p und ω_p das Analoge für das parallaktische Gestirn bedeuten; und dann setzt sich die Rechnung das Ziel, $\alpha - \alpha_p$ und $\omega - \omega_p$ entweder durch α, ω oder durch α_p, ω_p auszudrücken.

Man nennt $\alpha - \alpha_p$ und $\omega - \omega_p$ die *Parallaxe in Abscisse und Ordinate.* Man spricht also von Parallaxe in Azimut und Höhe, in Rectascension und Declination, in ekliptischer Länge und Breite je nach dem gewählten Coordinatensystem. Im Folgenden wird α_p durch α', ω_p durch ω' ersetzt werden.

Die Methode der Parallaxenberechnung.

319. Zwei rechtwinklige räumliche Coordinatensysteme sollen *Parallelsysteme* heifsen, wenn das eine durch *Parallelverschiebung* aus dem anderen *hervorgeht.* Es sei C der Ursprung des einen. O der Ursprung des anderen Systems (Fig. 92).

Es sei (S) ein beliebiger Raumpunkt; seine Coordinaten in Bezug auf das rechtwinklige System C seien $x\,y\,z$ und in Bezug auf das System O seien dieselben $x'\,y'\,z'$.

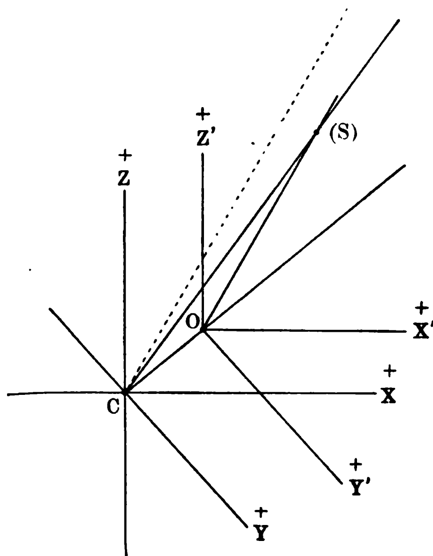
Liegt der Raumpunkt im Ursprung O, so sollen $x_0 y_0 z_0$ seine Coordinaten für das System C sein; für das System O sind dieselben 0 0 0. Es bestehen dann für jede Lage von (S) und von O die Beziehungen:

1. $$x - x_0 = x', \quad y - y_0 = y', \quad z - z_0 = z'.$$

Jedem rechtwinkligen räumlichen Coordinatensystem ist (siehe Nr. 57.) eindeutig ein Polar-Coordinatensystem zugeordnet. Hat für das System C der Strahl $C(S)$ die Polarabscisse α und die Polarordinate ω und ist Radius vector $\overline{C(S)} = \varDelta$, so ist:

2. $$z = \varDelta \sin \omega, \quad y = \varDelta \cos \omega \sin \alpha, \quad x = \varDelta \cos \omega \cos \alpha.$$

Fig. 92.



Hat der Strahl CO die Polarabscisse α_0 und die Polarordinate ω_0 und ist der Radius vector $\overline{CO} = \varrho$, so ist analog:

3. $$z_0 = \varrho \sin \omega_0, \quad y_0 = \varrho \cos \omega_0 \sin \alpha_0, \quad x_0 = \varrho \cos \omega_0 \cos \alpha_0.$$

Hat der Strahl $O(S)$ im Polarsystem O die Abscisse α' und die Ordinate ω' und ist $\overline{O(S)} = \varDelta'$, so ist:

4. $$z' = \varDelta' \sin \omega', \quad y' = \varDelta' \cos \omega' \sin \alpha', \quad x' = \varDelta' \cos \omega' \cos \alpha'.$$

320. Setzt man die Werthe aus 2., 3., 4. in das System 1., so entsteht nach Umsetzen aus:

$$z' = z - z_0, \qquad y' = y - y_0, \qquad x' = x - x_0:$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta' \sin\omega' &= \Delta \sin\omega - \varrho \sin\omega_0 \\ \Delta' \cos\omega' \sin\alpha' &= \Delta \cos\omega \sin\alpha - \varrho \cos\omega_0 \sin\alpha_0 \\ \Delta' \cos\omega' \cos\alpha' &= \Delta \cos\omega \cos\alpha - \varrho \cos\omega_0 \cos\alpha_0 \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

Diese Gleichungen bilden den *Ausgangspunkt der Parallaxenrechnung*, sobald C das *Erdcentrum* bedeutet, O einen *Erdort* vom Radius ϱ und (S) ein *Gestirn mit Parallaxe*, welches in dem betrachteten Augenblick den Abstand Δ von C und den Abstand Δ' von O besitzt.

321. Je nach der Wahl des Polar-Coordinatensystems C läfst sich bewirken, dafs α und ω entweder das *Azimut und die Höhe* oder die *Rectascension und Declination* oder *die ekliptische Länge und Breite des Gestirns* bedeuten; alsdann haben α' und ω' offenbar die analoge Bedeutung für die *Coordinaten des „parallaktischen Gestirns"*. Denn α' und ω' sind gleich den Polarcoordinaten des durch C gelegten Parallelstrahles von $O(S)$.

Nun setzen uns die Grundgleichungen I. in Stand, durch rechnerische Umformung zu Werthen für $tg(\alpha' - \alpha)$ und $tg(\omega' - \omega)$ zu gelangen. Dadurch wird das Hauptproblem gelöst, denn $\alpha' - \alpha$ und $\omega' - \omega$ sind die *Parallaxen in Abscisse und Ordinate.*

Bestimmung der Parallaxe in Azimut und Höhe, bezw. Zenitdistanz.

322. Soll aus dem System I. die Parallaxe in Azimut und Höhe abgeleitet werden, so mufs $\alpha = A$ das *Azimut*, $\omega = h = 90^0 - z$ *die Höhe* des *wahren Gestirns* bedeuten und $\alpha' = A'$, $\omega' = h' = 90^0 - z'$ das Analoge in Bezug auf das *parallaktische Gestirn.* Dies erfordert, dafs $\overset{+}{Z}'$ die *Verticalrichtung* des Erdortes O bedeutet, $\overset{+}{X}'$ den *Südstrahl*, $\overset{+}{Y}'$ den *Weststrahl* von O. Dadurch sind $\overset{+}{X}\overset{+}{Y}\overset{+}{Z}$ für C gegeben.

Es handelt sich nun noch darum, die *Polarcoordinaten* α_0, ω_0 *des Erdradius* CO zu bestimmen.

Der Winkel, welchen der Erdradius CO mit der Verticalrichtung von O bildet, ist $\varphi - \varphi'$ für einen nördlichen Erdort und $\varphi' - \varphi$ für einen südlichen. Es ist also:

$\omega_0 = 90^0 - (\varphi - \varphi')$ für einen nördlichen Erdort, und
$\omega_0 = 90^0 + (\varphi - \varphi')$ für einen südlichen Erdort.

Betrachtet man den Schnittpunkt Z des Verticalstrahles und den Schnittpunkt Z' des Erdradius mit der Himmelskugel, so liegt für ein *nördliches Zenit* Z das geocentrische Zenit Z' auf dem *Verticalkreis des Südpunktes*, hat also das Azimut 0^0; für ein *südliches* Zenit Z liegt Z' auf dem *Vertical des Nordpunktes*, hat also das Azimut 180^0.

Es wird demgemäfs für ein *nördliches* Zenit:

$$\begin{aligned} \sin\omega_0 &= \sin[90^0 - (\varphi - \varphi')] = \cos(\varphi - \varphi') \\ \cos\omega_0 &= \cos[90^0 - (\varphi - \varphi')] = \sin(\varphi - \varphi') \\ \sin\alpha_0 &= 0, \qquad \cos\alpha_0 = 1, \end{aligned}$$

dagegen wird für ein *südliches* Zenit:

$$\begin{aligned} \sin\omega_0 &= \sin[90^0 + (\varphi - \varphi')] = + \cos(\varphi - \varphi') \\ \cos\omega_0 &= \cos[90^0 + (\varphi - \varphi')] = - \sin(\varphi - \varphi') \\ \sin\alpha_0 &= 0 \qquad \cos\alpha_0 = - 1. \end{aligned}$$

Es wird also in *beiden* Fällen (Nr. 312., 3.):

$$\begin{aligned} z_0 &= \varrho \sin\omega_0 = \varrho \cos(\varphi - \varphi') \\ y_0 &= \varrho \cos\omega_0 \sin\alpha_0 = 0 \\ x_0 &= \varrho \cos\omega_0 \cos\alpha_0 = \varrho \sin(\varphi - \varphi'). \end{aligned}$$

Führen wir aufserdem ein:

$$\begin{aligned} \cos\omega &= \sin z \qquad & \sin\omega &= \cos z \\ \cos\omega' &= \sin z' \qquad & \sin\omega' &= \cos z', \end{aligned}$$

so geht das Fundamentalsystem I über in das *Fundamentalsystem für Parallaxe in Azimut und Zenitdistanz:*

$$\left.\begin{aligned} \Delta' \cos z' &= \Delta \cos z - \varrho \cos(\varphi - \varphi') \\ \Delta' \sin z' \sin A' &= \Delta \sin z \sin A \\ \Delta' \sin z' \cos A' &= \Delta \sin z \cos A - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

323. Die Untersuchungen, mittels deren $A' - A$, $z' - z$, Δ' als Functionen von A, z, Δ, ϱ und $\varphi - \varphi'$ aus den Gleichungen II. abgeleitet werden, verlangen bereits eine gewisse rechnerische Gewandtheit, welche für dieses Buch nicht vorausgesetzt wird. Auch sind damit einige Ueberlegungen über berechtigte Approximationen verbunden, welche den Rahmen der Darstellung überschreiten. Deshalb soll nur das Resultat mitgetheilt und im Uebrigen auf Chauvenet, Spherical Astronomy I, fifth Edition, S. 103 ff. oder auf Brünnow, Sphärische Astronomie, 4. Aufl., S. 140 ff. verwiesen werden.

Damit indessen der Leser eine Vorstellung erhalte, wie man aus den Gleichungen II. zu Gleichungen gelangen kann für eine der gesuchten Parallaxen, z. B. $A' - A$, so soll als Beispiel eine der Umformungen vorgenommen werden, welche sich in dem Parallaxencalcül stetig wiederholen.

Die beiden letzten Gleichungen von II. lauten:

a) $\varDelta' \sin z' \sin A' = \varDelta \sin z \sin A$	$\cos A$	$\sin A$
b) $\varDelta' \sin z' \cos A' = \varDelta \sin z \cos A - \varrho \sin(\varphi - \varphi')$	$-\sin A$	$\cos A$

Multiplicirt man die Gleichung a) mit $\cos A$, die Gleichung b) mit $- \sin A$ und addirt beide, so tritt bei dieser Operation der Ausdruck auf:

$$\sin A' \cos A - \cos A' \sin A = \sin(A' - A),$$

und man erhält:

c) $$\varDelta' \sin z' \sin(A' - A) = \varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin A.$$

Multiplicirt man die Gleichung a) mit $\sin A$, die Gleichung b) mit $\cos A$ und addirt beide, so treten bei dieser Operation die Ausdrücke auf:

$$\cos A' \cos A + \sin A' \sin A = \cos(A' - A)$$

und

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1,$$

und man erhält:

d) $$\varDelta' \sin z' \cos(A' - A) = \varDelta \sin z - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos A.$$

Die neuen Gleichungen c) und d) dienen zunächst als Bestimmungsgleichungen für $\sin(A' - A)$ und $\cos(A' - A)$.

324. Bezeichnet p *die äquatoriale Horizontalparallaxe des Gestirns* und a den Aequatorradius, so ist $\sin p = \frac{a}{\varDelta}$. Da aber der Aequatorradius als Einheit für $\varDelta$, $\varDelta'$, ϱ gilt, so ist $a = 1$ und

$$\sin p = \frac{1}{\varDelta}.$$

Dividirt man c) und d) der vorigen Nummer durch $\varDelta$, so entstehen die Gleichungen:

1. $$\frac{\varDelta'}{\varDelta} \sin z' \sin(A' - A) = \varrho \sin p \sin(\varphi - \varphi') \sin A,$$

2. $$\frac{\varDelta'}{\varDelta} \sin z' \cos(A' - A) = \sin z - \varrho \sin p \sin(\varphi - \varphi') \cos A.$$

Durch Division von 1. und 2. folgt:

3. $$tg(A' - A) = \frac{\frac{\varrho \sin p \sin(\varphi - \varphi')}{\sin z} \sin A}{1 - \frac{\varrho \sin p \sin(\varphi - \varphi')}{\sin z} \cos A}.$$

Führt man ein:

$$q = \frac{\varrho \sin p \sin(\varphi - \varphi')}{\sin z},$$

so kann man für 1., 2., 3. schreiben:

4. $$\frac{\varDelta'}{\varDelta} \frac{\sin z'}{\sin z} \sin(A' - A) = q \sin A,$$

5. $$\frac{\varDelta'}{\varDelta} \frac{\sin z'}{\sin z} \cos(A' - A) = 1 - q \cos A,$$

6. $$tg(A' - A) = \frac{q \sin A}{1 - q \cos A}.$$

325. Analog gebaute Gleichungen ergeben sich für $z' - z$, nämlich:

7. $$\frac{\varDelta'}{\varDelta} \sin(z' - z) = \varrho \sin p \sin[z - (\varphi - \varphi') \cos A],$$

8. $$\frac{\varDelta'}{\varDelta} \cos(z' - z) = 1 - \varrho \sin p \cos[z - (\varphi - \varphi') \cos A],$$

9. $$tg(z' - z) = \frac{\varrho \sin p \sin[z - (\varphi - \varphi') \cos A]}{1 - \varrho \sin p \cos[z - (\varphi - \varphi') \cos A]}.$$

Führt man ein:

$$u = z - (\varphi - \varphi') \cos A,$$

so kann man für 7., 8., 9. schreiben:

10. $$\frac{\varDelta'}{\varDelta} \sin(z' - z) = \varrho \sin p \sin u,$$

11. $$\frac{\varDelta'}{\varDelta} \cos(z' - z) = 1 - \varrho \sin p \cos u,$$

12. $$tg(z' - z) = \frac{\varrho \sin p \sin u}{1 - \varrho \sin p \cos u}.$$

326. Die beiden Systeme 4., 5., 6. und 10., 11., 12. sind in der Form enthalten:

$$\left.\begin{aligned} N \sin y &= a \sin x \\ N \cos y &= 1 - a \cos x \\ tg\, y &= \frac{a \sin x}{1 - a \cos x} \end{aligned}\right\} \qquad \text{III.}$$

Diese Abhängigkeit des N und y von a und x läfst sich nun nach den Untersuchungen der Analysis durch folgende Reihen darstellen:

$$\left.\begin{aligned} y &= a\,sin\,x + \frac{1}{2}\,a^2\,sin\,2x \cdots + \frac{1}{m}\,a^m\,sin\,m\,x \cdots \\ log\,N &= -M\left(a\,cos\,x + \frac{1}{2}\,a^2\,cos\,2\,x \cdots + \frac{1}{m}\,a^m\,cos\,m\,x \cdots\right) \end{aligned}\right\}\quad \text{IV.}$$

wo $M = 0{,}43429\ldots$ den Modulus des Briggs'schen Logarithmensystems (Nr. 27.) bezeichnet.

327. Dementsprechend liefern die Gleichungen 4., 5., 6. und 10., 11., 12. folgende Reihen:

13. $$A' - A = q\,sin\,A + \frac{1}{2}\,q^2\,sin\,2\,A + \frac{1}{3}\,q^3\,sin\,3\,A + \cdots$$

$$\text{für } q = \frac{\varrho\,sin\,p\,sin\,(\varphi - \varphi')}{sin\,z}.$$

14. $$z' - z = \varrho\,sin\,p\,sin\,u + \frac{1}{2}\,(\varrho\,sin\,p)^2\,sin\,2\,u + \frac{1}{3}\,(\varrho\,sin\,p)^3\,sin\,3\,u \ldots$$

15. $$log\,\varDelta' = log\,\varDelta - M\left[\varrho\,sin\,p\,cos\,u + \frac{1}{2}\,(\varrho\,sin\,p)^2\,cos\,2\,u \cdots\right]$$

$$\text{für } u = z - (\varphi - \varphi')\,cos\,A.$$

Hier sind die Parallaxen $A' - A$, $z' - z$ *in der Einheit des Bogenmafses* gegeben; man mufs sie also mit $\frac{1}{sin\,1''} = 206\,265$ multipliciren, um ihre Werthe in *Bogensecunden* zu erhalten.

328. In den Gleichungen 3. und 13. für $tg\,(A' - A)$ und $A' - A$, sowie in den Gleichungen 9. und 14. für $tg\,(z' - z)$ und $z' - z$ sind die beiden Parallaxen dargestellt, als Functionen von A, z, ϱ, p, $\varphi - \varphi'$.

Da der Ort gegeben ist, so ist φ, also auch $\varphi - \varphi'$ und der durch φ bestimmte Erdradius gegeben. Die Horizontal-Aequatorial-Parallaxe p wird dem Jahrbuch entnommen.

Die Berechnung verlangt, dafs A und z des *wahren* Gestirns gegeben sind. Sollten statt ihrer A' und z', d. h. Azimut und Zenitdistanz des *parallaktischen* Gestirns durch Beobachtung gegeben sein, so mufs man mit den Ausgangsgleichungen noch einige Umformungen vornehmen und erhält alsdann:

16. $$\sin(z' - z) = \varrho \sin p \sin[z' - (\varphi - \varphi') \cos A'],$$
wo
$$(\varphi - \varphi') \cos A' = (\varphi - \varphi') \cos A \ldots$$
17. $$\sin(A' - A) = \frac{\varrho \sin p \sin(\varphi - \varphi') \sin A'}{\sin[z' - (z' - z)]}.$$

Parallaxe in Rectascension und Declination.

329. Soll im System I. (Nr. 320.) $\alpha = \alpha$ die *Rectascension*, $\omega = \delta$ die *Declination* des Gestirns bedeuten, so mufs das rechtwinklige Coordinatensystem (Fig. 92) mit dem geocentrischen Ursprung C folgende Lage haben.

Die positive Z-Axe $\overset{+}{Z}$ mufs gegen den *nördlichen Himmelspol* gerichtet sein, der Strahl $\overset{+}{X}$ gegen den *Frühlingspunkt* und der Strahl $\overset{+}{Y}$ gegen *denjenigen Punkt des Aequators*, *dessen Rectascension gleich* $+ 90^0$ *ist.*

Die Polarcoordinaten α_0, ω_0 des *Erdradius* sind identisch mit den sphärischen Coordinaten seines Schnittpunktes Z' mit der Himmelskugel. Der Ordinatenkreis (Nr. 47.) von Z' ist der obere Meridian, also ist $\alpha_0 = \vartheta$ (Sternzeit); die Ordinate ist die geocentrische Breite, also ist $\omega_0 = \varphi'$. Folglich liefert System I.:

$$\Delta' \cos\delta' \cos\alpha' = \Delta \cos\delta \cos\alpha - \varrho \cos\varphi' \cos\vartheta$$
$$\Delta' \cos\delta' \sin\alpha' = \Delta \cos\delta \sin\alpha - \varrho \cos\varphi' \sin\vartheta$$
$$\Delta' \sin\delta' = \Delta \sin\delta - \varrho \sin\varphi'.$$

Hieraus entsteht:

$$\left.\begin{aligned} \Delta' \cos\delta' \sin(\alpha' - \alpha) &= \varrho \cos\varphi' \sin(\alpha - \vartheta) \\ \Delta' \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha) &= \Delta \cos\delta - \varrho \cos\varphi' \cos(\alpha - \vartheta) \\ tg(\alpha' - \alpha) &= \frac{\dfrac{\varrho \cos\varphi'}{\Delta \cos\delta} \sin(\alpha - \vartheta)}{1 - \dfrac{\varrho \cos\varphi'}{\Delta \cos\delta} \cos(\alpha - \vartheta)}. \end{aligned}\right\} \quad \text{V.}$$

Durch Einführung von

$$\frac{1}{\Delta} = \sin p, \quad m = \frac{\varrho \cos\varphi'}{\Delta \cos\delta} = \frac{\varrho \sin p \cos\varphi'}{\cos\delta}$$

geht die letzte Gleichung über in:

18. $$tg(\alpha' - \alpha) = \frac{m \sin(\alpha - \vartheta)}{1 - m \cos(\alpha - \vartheta)}.$$

Hieraus entsteht gemäfs Nr. 319.:

19. $\alpha' - \alpha = m \sin(\alpha - \vartheta) + \frac{1}{2} m^2 \sin 2 (\alpha - \vartheta) + \cdots$

im Bogenmafs.

Da $\vartheta - \alpha =$ dem Stundenwinkel t, so ist:

20. $$tg(\alpha - \alpha') = \frac{m \sin t}{1 - m \cos t}.$$

330. Werden β und γ durch die Gleichungen definirt:

$$\beta \sin\gamma = \sin\varphi'$$

$$\beta \cos\gamma = \frac{\cos\varphi' \cos\left[\vartheta - \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)\right]}{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)},$$

so folgt:

21. $$\beta = \frac{\sin\varphi'}{\sin\gamma} \quad \text{und} \quad tg\gamma = \frac{tg\varphi' \cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos\left[\vartheta - \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)\right]}$$

22. $\Delta' \sin(\delta' - \delta) = -\varrho\beta \sin(\gamma - \delta) = \varrho\beta \sin(\delta - \gamma)$

23. $\Delta' \cos(\delta' - \delta) = \Delta - \varrho\beta \cos(\gamma - \delta) = \Delta - \varrho\beta \cos(\delta - \gamma)$

24. $\Delta' \sin(\delta' - \gamma) = \Delta \sin(\delta - \gamma)$

25. $$tg(\delta' - \delta) = \frac{\frac{\varrho\beta}{\Delta}\sin(\delta - \gamma)}{1 - \frac{\varrho\beta}{\Delta}\cos(\delta - \gamma)}$$

26. $$\delta' - \delta = \frac{\varrho\beta}{\Delta}\sin(\delta - \gamma) + \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho\beta}{\Delta}\right)^2 \sin 2(\delta - \gamma) \cdots$$

27. $$\delta' - \delta = \frac{\varrho \sin\varphi'}{\Delta} \frac{\sin(\delta - \gamma)}{\sin\gamma} \cdots$$

331. Die Parallaxe des Mondes ist so grofs (etwa 57′ bei mittlerer Entfernung), dafs der scheinbare Halbmesser R des Mondes für den Mittelpunkt der Erde angebbar kleiner ist, als für einen Punkt der Erdoberfläche.

Entsprechen den scheinbaren Halbmessern R und R' die Abstände Δ und Δ', so ist:

$$R : R' = \Delta' : \Delta.$$

und da nach Gleichung 24. ist:

$$\Delta' : \Delta = \sin(\delta - \gamma) : \sin(\delta' - \gamma),$$

so folgt:

28. $$R' = R\,\frac{\sin(\delta' - \gamma)}{\sin(\delta - \gamma)}.$$

332. Den *Mond ausgenommen, dürfen wir folgende Approximationen machen:*

$$\sin p = p = \frac{1}{\Delta}, \quad m = \frac{\varrho\, p \cos\varphi'}{\cos\delta}$$

(19.) $$\alpha - \alpha' = \frac{\varrho\, p \cos\varphi' \sin t}{\cos\delta}$$

(21.) $$tg\,\gamma = \frac{tg\,\varphi'}{\cos t}$$

(27.) $$\delta - \delta' = \frac{\varrho\, p \sin\varphi' \sin(\gamma - \delta)}{\sin\gamma}.$$

Dagegen lauten *die strengen Formeln für den Mond:*

$$m = \frac{\varrho \sin p \cos\varphi'}{\cos\delta}$$

(18.) $$tg\,(\alpha' - \alpha) = \frac{m \sin(\alpha - \vartheta)}{1 - m\cos(\alpha - \vartheta)},$$

oder:

(20.) $$tg\,(\alpha - \alpha') = \frac{m \sin t}{1 - m \cos t}$$

(21.) $$tg\,\gamma = \frac{tg\,\varphi' \cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos\left[\vartheta - \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) - \alpha\right]},$$

oder:

$$tg\,\gamma = \frac{tg\,\varphi' \cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos\left[t - \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)\right]},$$

$$n = \frac{\varrho \sin p \sin\varphi'}{\sin\gamma},$$

(25.) $$tg\,(\delta' - \delta) = \frac{n \sin(\delta - \gamma)}{1 - n\cos(\delta - \gamma)},$$

oder:

$$tg\,(\delta - \delta') = \frac{n \sin(\gamma - \delta)}{1 - n\cos(\gamma - \delta)}.$$

333. Soll die Parallaxe $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$ aus den Beobachtungswerthen α' und δ', statt aus α und δ, gefunden werden, so multiplicirt man die ersten beiden Gleichungen in Nr. 329. mit $-\sin\alpha'$, bezw. $+\cos\alpha'$ und addirt. Es entsteht dadurch:

29. $$\sin(\alpha - \alpha') = \frac{\varrho \sin p \cos\varphi'}{\cos\delta} \sin(\vartheta - \alpha').$$

Dieselben Ausgangsgleichungen, nach Umformung mittels Einführung des Winkels γ, Multiplication mit $\cos\delta'$, bezw. $-\sin\delta'$ und Addition führen zu:

30. $$\sin(\delta - \delta') = \frac{\varrho \sin p \sin\varphi' \sin(\gamma - \delta')}{\sin\gamma}.$$

Wird $t' = \vartheta - \alpha'$ gesetzt, so wird:

31. $$tg\,\gamma = \frac{tg\,\varphi' \cos\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')}{\cos[t' - \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')]}.$$

Bei der Berechnung wird in 29. zunächst δ' statt δ gesetzt; man berechnet alsdann γ aus 31. und $\delta - \delta'$ aus 30. Mit dem gefundenen Werthe von δ kann man schliefslich den Werth von $\sin(\alpha - \alpha')$ in 29. corrigiren.

Zwölfter Abschnitt.

Die Methoden der Längenbestimmung.

---

334. Allen Längenbestimmungen liegt die Formel zu Grunde

$$l = \tau - t.$$

Hierin bezeichnen τ und t die Stundenwinkel *desselben* Gestirns für *denselben* Augenblick. τ bezieht sich auf den Fundamentalmeridian, t bezieht sich auf den Meridian, dessen Länge l ist. Je nachdem $\tau - t$ positiv oder negativ wird, bedeutet l eine westliche oder östliche Länge (Nr. 83. A. für $l = \lambda$).

Alle Methoden der Längenbestimmung streben danach, *einen absoluten Zeitpunkt T durch ein Merkmal von zeitlich verschwindender Dauer zu kennzeichnen und durch die Stundenwinkel τ und t auszudrücken.*

Diese Merkmale sind entweder *direct* durch gewisse Phänomene gegeben oder sie müssen aus Beobachtungen *abgeleitet* werden. Zu den Phänomenen, welche einen Zeitpunkt *direct* kennzeichnen, gehören alle Eintritte von Planeten in den Schatten anderer Planeten, ebenso die Austritte. Im ersteren Fall tritt ein Verlöschen ein, im zweiten Fall ein Aufleuchten. Die bekanntesten Phänomene dieser Art sind die *Mondfinsternisse.* Es gehören auch dahin die *Verfinsterungen der Jupitertrabanten.*

335. Die Möglichkeit, einen absoluten Zeitpunkt durch ein abgeleitetes Merkmal zu kennzeichnen, bietet die *veränderliche Rectascension des Mondes,* auch die der *unteren Planeten.*

Die Rectascension des Mondes ändert sich schnell, durchschnittlich um etwas mehr als eine Bogenminute in zwei Zeitminuten. Der Mond [☾] liefert deshalb eine stete Folge von Perioden, innerhalb deren die AR☾ von 0^h auf 24^h wächst.

Jedem absoluten Zeitpunkt T derselben Rectascensionsperiode ist also durch die AR eine zwischen 0 und 24^h, bezw. 360^0 gelegene Zahl α zugeordnet und umgekehrt. Demzufolge nennen wir *den Werth α das Merkmal des absoluten Zeitpunktes T der betrachteten Periode.*

Auf der Beschaffung oder Ableitung des Rectascensionsmerkmals beruhen folgende Methoden:

Sternbedeckungen, *Mondculminationen*, *Mondhöhen*, *Sonnenfinsternisse.* Liefert nicht der Mond, sondern einer der unteren Planeten das Merkmal, so treten an die Stelle die *Vorübergänge von Venus oder Mercur* vor der Sonnenscheibe.

336. Es sollen nun im Folgenden die wichtigsten Methoden der Längenbestimmung zusammengestellt werden. Für jede ist das den absoluten Zeitpunkt T kennzeichnende Merkmal angegeben und das zu beobachtende Phänomen, aus welchem es abgeleitet wird.

1. *Sternbedeckungen.*

Das Merkmal ist der *Werth der Mondrectascension* für den *absoluten Zeitpunkt T*, in welchem der *Stundenkreis des Mondes mit dem Stundenkreise eines Sternes der $AR\alpha$ zusammenfällt.* Das Beobachtungsphänomen ist der Durchtritt des Sternes durch den sichtbaren Mondrand. Man unterscheidet Eintritt und Austritt, je nachdem der Stern bei dem Durchtritt verlöscht oder sichtbar wird (s. Nr. 343. ff.).

2. *Mondculminationen.*

Das Merkmal ist der *Werth der AR des Mondes* für den *absoluten Zeitpunkt T*, in welchem *der Stundenkreis des Mondes mit dem oberen Meridian des Ortes zusammenfällt*, d. h. für die obere Culmination. Das Beobachtungsphänomen ist die *Meridianpassage bei bekannter Sternzeit ϑ*. Dann ist ϑ gleichzeitig die AR des Mondes (Nr. 84. I.).

3. *Mondhöhen.*

Das Merkmal ist *ein bestimmter Werth der Mondrectascension*, ihm entspricht der absolute Zeitpunkt T. Das Beobachtungsphänomen ist die *beobachtete Zenitdistanz eines Mondrandes zur Ortssternzeit ϑ im Augenblick T.* Hieraus wird der wahre Stundenwinkel t des Mondes abgeleitet, und aus $(\vartheta - t)^0_{24} = \alpha$ die Rectascension.

337. In den betrachteten Fällen 1., 2., 3. wird also das Merkmal auf dreifach verschiedene Art abgeleitet.

Man kennt die Ortszeit für einen vorgeschriebenen Werth α der Mondrectascension in dem absoluten Zeitpunkt T. Andererseit läſst sich T in Greenwichzeit mit Hilfe von α ausdrücken. Denn die für den Meridian von Greenwich berechneten Mondtafeln liefern die Werthe der AR☾ für äquidistante Zeitpunkte, und durch Interpolation läſst sich der Zeitpunkt T, für welchen die AR☾ gleich α ist, in Greenwichzeit τ angeben.

Es ist deshalb in allen drei Fällen die Ortslänge l darstellbar als Differenz von Greenwich- und Ortszeit, bezogen auf den absoluten Zeitmoment T.

4. *Sonnenfinsternisse.*

338. Das Merkmal des absoluten Zeitpunktes T entsteht aus 1., wenn der Sonnenmittelpunkt an Stelle des Sternes tritt.

Das Beobachtungsphänomen ist *eine der vier Berührungen, welche für die Ränder der Sonne und des Mondes eintreten können.* Wird hieraus die Ortszeit T'_0 abgeleitet für den Augenblick T des Durchtritts und aus den Sonnen- und Mondtafeln die Greenwichzeit T_0 von T, so wird $l = T_0 - T'_0$.

Eine Vereinfachung des hierbei einzuschlagenden rechnerischen Verfahrens werden wir bei der Längenbestimmung durch Sternbedeckungen (Nr. 336 ff.) kennen lernen.

5. *Vorübergänge von Venus oder Mercur.*

Vorübergänge haben in Bezug auf die beiden unteren Planeten dieselbe Bedeutung, welche die Sonnenfinsternisse in Bezug auf den Mond haben. Es ist also principiell nichts Neues darüber zu sagen.

339. In den folgenden beiden Methoden ist das Merkmal des absoluten Zeitpunkts T *irdischer* Natur.

6. *Zeitübertragung durch Uhren.*

Voraussetzung ist eine Uhr, welche Greenwichzeit liefert. Das *Phänomen ist die Uhrablesung* U im absoluten Augenblick T. Hieraus wird mittels einer Zeitbestimmung im Augenblick T die Ortszeit t abgeleitet. U ist entweder direct gleich der Greenwichzeit τ im Augenblick T oder kann daraus mittels des be-

kannten Ganges der Uhr abgeleitet werden. Man erhält also das dem Augenblick T zugeordnete τ und t und $l = \tau - t$.

7. *Elektrische Telegraphie und optische Zeitsignale.*

Greenwich und der Ort O der gesuchten Länge l seien telegraphisch verbunden. Das *Phänomen besteht in einem Schlage, welcher in Greenwich gegeben wird und mittels der Leitung einen zweiten Schlag an dem Orte O bewirkt.* Dürfen beide Schläge als Merkmale desselben absoluten Zeitmomentes T angesehen werden, und ist τ, bezw. t die Zeit von Greenwich, bezw. des Ortes, so wird $l = \tau - t$. Die Annahme ist nicht absolut zutreffend. Durch Umkehr des Verfahrens erhält man eine zweite Gleichung, $l' = \tau' - t'$ und aus $\frac{1}{2}(l + l')$ die gesuchte Länge frei von dem Fehler des Zeitintervalls, welches die beiden Schläge trennt.

Da die Methode der Zeitübertragung durch die Uhr und den elektrischen Telegraphen den Werth von τ in der Gleichung $l = \tau - t$ *ohne Vermittlung des Jahrbuchs* liefert, so lassen sie sich auch verwerthen, wenn an Stelle von Greenwich ein Ort F von beliebiger Länge tritt. Dann bedeutet $\tau - t$ die Längendifferenz der Orte O und F. Ist $\tau - t$ positiv, so hat O von F den westlichen Abstand $\tau - t$; ist $\tau - t$ negativ, so hat O von F den östlichen Abstand $t - \tau$.

Auf Reisen wird die Methode der elektrischen Telegraphie kaum Verwerthung finden. Sind aber zwei Beobachter vorhanden, welche einander *Lichtsignale* geben können, so lassen sich letztere ganz in derselben Weise für Bestimmung von Längendifferenzen verwerthen wie die Schläge bei elektrischer Verbindung. Besonders geeignet hierfür sind die durch Gaufs'sche Heliotrope bewirkten Lichtsignale, welche aus sehr grofsen Entfernungen wahrnehmbar sind und bei geodätischen Messungen angewandt werden.

8. *Mondfinsternisse.*

340. Eine Mondfinsternifs findet statt, wenn der Mond auf seiner Bahn den Erdschatten schneidet. Die Berührung eines Mondrandes mit dem Schattenkegel der Erde kennzeichnet einen absoluten Zeitmoment T; ist das Phänomen an dem Erdorte O sichtbar und ist t die Ortszeit, so entnimmt man τ dem Jahrbuch und bildet $\tau - t$. Wegen der ungenügenden Schärfe des

durch die Sonnenscheibe bedingten Schattens (Nr. 342.) liefert diese Methode nur rohe Näherungswerthe.

9. *Verfinsterung eines Jupitertrabanten.*

Die dem Jupiter angehörigen Monde oder Trabanten kreuzen den Schatten dieses Planeten, und dadurch entstehen die Verfinsterungen.

Methode 8 und 9 unterscheiden sich principiell gar nicht: an Stelle des berührenden Mondrandes tritt der Trabant, an Stelle des von der Erde geworfenen Schattens der vom Jupiter geworfene.

341. Die aufgezählten Methoden sind sehr ungleichwerthig. Sie unterscheiden sich von einander nach der Genauigkeit der gelieferten Resultate; nach der gröſseren oder geringeren Beobachtungskunst, welche sie erfordern; nach dem gröſseren oder geringeren Rechnungsaufwand für die Herleitung des Resultats aus den Beobachtungen; nach der gröſseren oder geringeren Häufigkeit, mit welcher die Phänomene auftreten.

Für den Reisenden kommen vornehmlich in Betracht die Methoden der Zeitübertragung und der Sternbedeckungen, in niederen Breiten auch die der Mondhöhen.

Die Methode der *Monddistanzen* wird an dieser Stelle nur der Vollständigkeit wegen erwähnt, aber nicht empfohlen. Das Merkmal ist hier der auf das Erdcentrum bezogene Abstand D des Mondmittelpunktes von einem geeigneten Stern oder von dem Sonnenmittelpunkte. Von dem Erdort aus wird der Abstand D' eines bestimmten Mondrandpunktes von dem Stern oder von einem bestimmten Sonnenrandpunkte bei bekannter Ortszeit T' gemessen. Durch Rechnung kann die Monddistanz D aus D' abgeleitet („reducirt") werden. Das N. J. liefert auf S. XIII bis XVIII jedes Monats die Werthe von Monddistanzen für bestimmte Zeitpunkte. Hiermit läſst sich die Greenwichzeit T_0 berechnen, welche der Distanz D entspricht; man erhält also $l = T_0 - T_0'$. Die Beobachtungen können nicht mit einem Universalinstrument, sondern müssen mit einem Reflexionsinstrument, oft bei sehr unbequemer Körperstellung, ausgeführt werden, und der Moment der Berührung von Mondrand und Sonnenrand oder von Stern und Mondrand im Fernrohr des Sextanten oder Prismenkreises ist schwer aufzufassen; man vermuthet ihn mehr, als daſs man

ihn mit Ueberzeugung empfindet. Kein Wunder, dafs gelegentlich einmal ausgezeichnete Resultate herauskommen, welche von den Anhängern der Methode als Beweis für deren grofse Brauchbarkeit angeführt werden.

Bei der erhöhten Zuverlässigkeit, welche die Schiffschronometer durch die Fortschritte der Chronometertechnik erhalten haben, wird die vormals classische Methode der Monddistanzen auch von Seefahrern nur ausnahmsweise angewandt.

In neuerer Zeit hat man sich bemüht, die Methode der Monddistanzen mittels der Photographie zu verwerthen, hier tritt die Camera an Stelle des Auges und die lichtempfindliche Platte an Stelle der Netzhaut.

342. Die *Methode der Zeitübertragung* stellt die geringsten Anforderungen an die Beobachtungspraxis des Reisenden; sie verlangt nur gute Präcisionsuhren und häufig ausgeführte Zeitbestimmungen und wird meist dann angewandt werden, wenn es sich um Ableitung von Längendifferenzen zwischen zwei Orten handelt, von deren einem die Länge bekannt ist.

Die *Methode der Verfinsterungen von Jupitertrabanten* wird in ihrer Einfachheit durch keine andere Methode erreicht; sie verlangt nichts anderes, als dafs der Zeitpunkt des Verschwindens oder Wiedererscheinens mittels der Uhr festgehalten wird, und dafs man sich durch Zeitbestimmungen der Uhrcorrection versichert hat. Andererseit wird dabei an den Reisenden, welcher nicht astronomischer Beobachter von Fach ist, die precäre Anforderung gestellt, einen unwiderbringlichen Moment richtig aufzufassen. Wird er, im Moment des Aufleuchtens oder Verlöschens stutzig so fafst er auch nicht die Uhrzeit richtig auf, zu welcher er stutzig wurde, und die Beobachtung ist verloren.

Es kommt noch ein Zweites hinzu: der Moment des Auffassens ist abhängig von der Leistung des Fernrohrs. Dies erklärt sich daraus, dafs die Sonne den Jupiterschatten bedingt; sie ist eine leuchtende Scheibe, d. h. ein Vielfaches von leuchtenden Punkten. Nun kann aber nur ein leuchtender *Punkt*, dessen Strahlen eine undurchsichtige Kugel treffen, *einen scharf begrenzten Schattenkegel* bestimmen; eine leuchtende Scheibe bestimmt so viele scharf begrenzte Schattenkegel, wie leuchtende Punkte vorhanden sind.

Die Gesammtheit dieser Schattenkegel erfüllt einen Theil des Raums; nennen wir ihn den Schattenraum, so werden seine Punkte nach der *Anzahl* der Schattenkegel unterschieden werden können, denen sie *gleichzeitig* angehören. Je gröfser die Anzahl ist, um so weniger Licht wird der Punkt empfangen, und wenn er gleichzeitig *allen* vorhandenen Schattenkegeln angehört, so wird er *gar kein* Licht empfangen. Die Gesammtheit *dieser* Punkte bilden den sogenannten *Kernschatten.* Derselbe wird in unserem Falle bestimmt durch den Kegel, welcher die Sonne und den Jupiter gleichzeitig berührt.

Aus diesem Grunde wird man den Moment des Verlöschens oder Aufleuchtens verschieden auffassen, je nach der Leistungsfähigkeit des benutzten Fernrohrs. Der daraus hervorgehende Fehler wird compensirt, wenn man sowohl Eintritt wie Austritt desselben Trabanten mit demselben Fernrohr beobachten kann.

Die Methode versagt, wenn der Jupiter in der Nähe der Sonne steht, z. B. im Jahre 1903 vom 24. Januar bis 19. März.

Das N. J. enthält auf S. 218 bis 223 unter der Bezeichnung „Jupiters-Trabanten-Finsternisse“ die erforderlichen Angaben. Dieselben können aber wegen der Tafelfehler bis auf 2^m von der Wahrheit abweichen und müssen erst durch besondere Beobachtungen auf Sternwarten richtig gestellt werden.

Die *Methode der Sternbedeckungen* ist theoretisch nicht so einfach, wie die für Landreisen empfohlenen Methoden der Zeitübertragung und der Mond-Zenitdistanzen. Es ist aber nothwendig, dafs sie hier dargestellt wird.

Längenbestimmung durch Sternbedeckungen.

343. Die Bedeckungen gewisser Sterne durch den Mond liefern dem Reisenden das beste Mittel zur Längenbestimmung. Deshalb sind dieselben im Nautischen Jahrbuch, S. 244 bis 246 unter der Ueberschrift „Elemente der Sternbedeckungen (für...)“ besonders berücksichtigt worden. Auch findet sich auf S. XVI bis XVIII der Erklärung das Verfahren angegeben, nach welchem eine beobachtete Bedeckung berechnet wird. Im Anschlufs daran soll die theoretische Grundlage dieses Verfahrens im Folgenden gegeben werden.

Jede Bedeckung liefert zwei Beobachtungsmomente, welche *Eintritt* und *Austritt* heifsen. Im ersteren Falle erlöscht der Stern plötzlich für das Auge des Beobachters, tritt scheinbar durch den Rand des Mondes und wird bedeckt; der andere Fall liefert das Umgekehrte: der Stern leuchtet plötzlich am Mondrande auf. Kennt man die Uhrcorrection und den Gang, so lassen sich die beiden Durchtritte in mittlerer Ortszeit angeben; diese Ortszeiten sollen mit T'_1 und T'_2, dagegen die entsprechenden Greenwichzeiten der Durchtritte mit T_1 und T_2 bezeichnet werden.

Der Moment, wo der Stundenkreis des Mondmittelpunktes durch den Stundenkreis des Bedeckungssternes tritt, ist im N. J. in Greenwichzeit angegeben und mit T_0 bezeichnet. T_0 heifst die *Conjunction der beiden Gestirne in Rectascension.*

Unsere Aufgabe besteht nun darin, sowohl T_1 wie T_2 aus T_0 abzuleiten; wir werden dafür die Ausdrücke finden:

$$T_1 = T_0 - \tau - \Delta T$$
$$T_2 = T_0 - \tau + \Delta T$$

und die Werthe für τ und ΔT aufstellen. Alsdann wird

$$l = T_1 - T'_1 = T_2 - T'_2$$

die *gesuchte Länge.*

Es sind hier wiederum die Grundgleichungen der Parallaxenrechnung, welche zum Ziele führen. Aufserdem gebrauchen wir die Gleichung eines geraden Kreiscylinders, dessen Radius $= k$ ist, dessen Axe der Z-Axe des rechtwinkligen Coordinatensystems XYZ parallel ist und die XY-Ebene im Punkte a, b schneidet. Offenbar ist

1. $$(x - a)^2 + (y - b)^2 = k^2$$

nicht allein die Gleichung des Kreises, in welchem die XY-Ebene von dem Cylinder geschnitten wird (Nr. 67., 3.), sondern auch die Gleichung des Cylinders selbst. Denn jeder Punkt xyz des Cylinders und nur ein solcher, genügt der Gleichung 1.

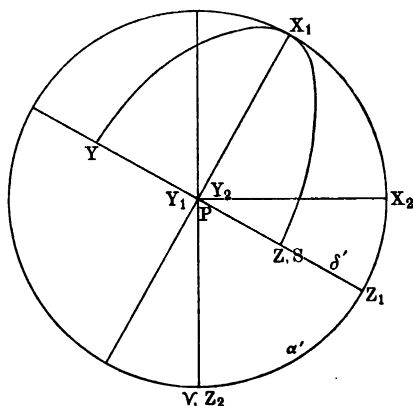
Es sei gegeben ein rechtwinkliges Coordinatensystem $Y_2 Z_2 X_2$; sein Ursprung C liege im Erdcentrum; Y_2 sei die verlängerte Erdaxe, Strahl $\overset{+}{Y}_2$ sei nach dem Nordpol P der Himmelskugel gerichtet, $\overset{+}{Z}_2$ nach dem Frühlingspunkt, $\overset{+}{X}_2$ nach dem Aequatorpunkt der AR $6^h = 90^0$.

Der *Zeitpunkt der Betrachtung* soll ein *Durchtritt des Bedeckungssternes durch den Mondrand* sein, kann also sowohl einen Eintritt wie einen Austritt bedeuten. Es sei $\overset{+}{Z}$ der geocentrische Visirstrahl des Sternes S. Durch östliche Drehung um die Erdaxe läfst sich der Stundenflügel des Strahles $\overset{+}{Z}_2$ in die Lage bringen, dafs er den Strahl Z enthält; alsdann ist die Drehung gleich der $AR\,\alpha'$ des Sternes S. Nennt man $Y_1\,Z_1\,X_1$ das Coordinatensystem, mit welchem $Y_2\,Z_2\,X_2$ auf Grund der Drehung coincidirt, so ist Strahl $\overset{+}{Y}_1$ identisch mit Strahl $\overset{+}{Y}_2$, Strahl $\overset{+}{Z}_1$ ist nach dem Aequatorpunkt der $AR\,\alpha'$ gerichtet, Strahl $\overset{+}{X}_1$ ist nach dem Aequatorpunkt der AR $90^0 + \alpha'$ gerichtet.

Der Strahl Z_1 ist die Aequatorprojection des Visirstrahles Z. Die Neigung beider ist also gleich dem Betrage der Declination δ' des Sternes.

Das System $Y_1\,Z_1\,X_1$ läfst sich so um X_1 drehen, dafs $\overset{+}{Z}_1$ mit Strahl Z coincidirt. Das System, mit welchem $Y_1\,Z_1\,X_1$ in Folge der Drehung coincidirt, werde mit YZX bezeichnet, wo $\overset{+}{Z}$ identisch ist mit dem Visirstrahl des Sternes S. Zur Erleichterung der Vorstellung von der gegenseitigen Lage, welche die drei räumlichen rechtwinkligen Coordinatensysteme des gemeinsamen Ursprungs S besitzen, dient Fig. 93. Sie stellt die nördliche Himmelshemisphäre vor für ein über dem nördlichen Himmelspol P befindliches Auge. Deshalb erscheinen alle Halbkreise durch P als geradlinige Strecken und fallen scheinbar zusammen mit Aequatordurchmessern. Voraussetzung ist, dafs der Bedeckungsstern der *nördlichen* Hemisphäre angehört. Die Schnittpunkte der *positiven* Axenstrahlen des Systems $Y_2\,Z_2\,X_2$ sind mit $Y_2\,Z_2\,X_2$ bezeichnet; analoge Bezeichnungen gelten für die beiden anderen Systeme.

Fig. 93.



344. Für den betrachteten Augenblick und das System

$Z_2 X_2 Y_2$ habe der Mond die rechtwinkligen Coordinaten $z_2 x_2 y_2$, den geocentrischen Abstand Δ, die AR α und die Declination δ. Der Erdort der Beobachtung habe die rechtwinkligen Coordinaten $\zeta_2 \xi_2 \eta_2$, den geocentrischen Abstand ϱ (Erdradius), die Abscisse ϑ (Sternzeit) und die Declination φ' (verbesserte Breite).

Alsdann bestehen die Gleichungen (Nr. 57.):

$$z_2 = \Delta \cos\delta \cos\alpha, \quad x_2 = \Delta \cos\delta \sin\alpha, \quad y_2 = \Delta \sin\delta,$$
$$\zeta_2 = \varrho \cos\varphi' \cos\vartheta, \quad \xi_2 = \varrho \cos\varphi' \sin\vartheta, \quad \eta_2 = \varrho \sin\varphi'.$$

Für $Z_1 Y_1 X_1$ und das zugeordnete sphärische Coordinatensystem der Himmelskugel werden $\alpha - \alpha'$ und δ die Abscisse und Ordinate des Mondes; $\vartheta - \alpha'$ und φ' die Abscisse und Ordinate des Erdortes. Folglich ist:

$$z_1 = \Delta \cos\delta \cos(\alpha - \alpha'), \quad x_1 = \Delta \cos\delta \sin(\alpha - \alpha'), \quad y_1 = \Delta \sin\delta,$$
$$\zeta_1 = \varrho \cos\varphi' \cos(\vartheta - \alpha'), \quad \xi_1 = \varrho \cos\varphi' \sin(\vartheta - \alpha'), \quad \eta_1 = \varrho \sin\varphi'.$$

Zwischen den rechtwinkligen Coordinaten $z_1\ y_1\ x_1$ eines Punktes für System $Z_1\ Y_1\ X_1$ und den Coordinaten $z\ y\ x$ desselben Punktes für System $Z\ Y\ X$ bestehen die leicht abzuleitenden Gleichungen:

$$z = y_1 \sin\delta' + z_1 \cos\delta',$$
$$y = y_1 \cos\delta' - z_1 \sin\delta',$$
$$x = x_1.$$

Durch Anwendung dieser Gleichungen sowohl auf den Mond, wie auf den Erdpunkt erhalten wir:

$$\text{Mond} \begin{cases} z = \Delta \sin\delta' \sin\delta + \Delta \cos\delta' \cos\delta \cos(\alpha - \alpha'), \\ y = \Delta \cos\delta' \sin\delta - \Delta \sin\delta' \cos\delta \cos(\alpha - \alpha'), \\ x = \Delta \cdot \cos\delta \sin(\alpha - \alpha'). \end{cases}$$

$$\text{Erdort} \begin{cases} \zeta = \varrho \sin\delta' \sin\varphi' + \varrho \cos\delta' \cos\varphi' \cos(\vartheta - \alpha'), \\ \eta = \varrho \cos\delta' \sin\varphi' - \varrho \sin\delta' \cos\varphi' \cos(\vartheta - \alpha'), \\ \xi = \varrho \cos\varphi' \sin(\vartheta - \alpha'). \end{cases}$$

345. Die äquatoriale Conjunction von Mondcentrum und Stern, d. h. das Zusammenfallen ihrer Stundenkreise, soll im Zeitpunkt T_0 *mittlerer Greenwichzeit* stattfinden. In diesem Augenblick sollen $x_0\ y_0\ z_0$ die rechtwinkligen Mondcoordinaten für System $X\ Y\ Z$ sein. Die Coordinaten $x\ y\ z$ des Mondes sind Functionen der Zeit. Es seien $x'\ y'\ z'$ ihre abgeleiteten Functionen (Nr. 274. ff.) und $x'_0\ y'_0\ z'_0$ die Werthe derselben im Zeitpunkt T_0

Dann werden für einen Zeitpunkt $T_0 + \tau'$ in der Nähe von Zeitpunkt T_0 nach dem Taylor'schen Satz (Nr. 278.):

$$x_0 + x'_0\tau', \qquad y_0 + y'_0\tau', \qquad z_0 + z'_0\tau'$$

die Coordinaten des Mondes sein. Ist nun $T_0 + \tau'$ der Zeitpunkt eines Durchtritts durch den Mondrand, so liegt der Erdpunkt $\xi\,\eta\,\zeta$, für welchen dieser Durchtritt beobachtet wird, auf dem geraden Kreiscylinder, dessen Axe Z ist und die XY-Ebene in dem Punkte

$$x_0 + x'_0\tau', \qquad y_0 + y'_0\tau'$$

schneidet. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Kreises, welcher den linearen Mondhalbmesser k zum Radius hat. Da $\xi\,\eta\,\zeta$ ein Punkt des Cylinders ist, so wird wegen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2$$

für

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad a = x_0 + x'_0\tau', \quad b = y_0 + y'_0\tau':$$
$$(x_0 + x'_0\tau' - \xi)^2 + (y_0 + y'_0\tau' - \eta)^2 = k^2.$$

Der Cylinder heifst der *Schattencylinder*; seine Axe, welche durch den Mittelpunkt des Mondes geht und gegen den Fixstern gerichtet ist, ist parallel der Z-Axe und heifst die *Schattenaxe.*

Die Gleichung

$$(x_0 + x'_0\tau' - \xi)^2 + (y_0 + y'_0\tau' - \eta)^2 = k^2$$

heifst die *Schattengleichung.* Ihre Lösung ist identisch mit der Lösung des Problems. Denn der Zeitpunkt T_0 der Conjunction ist durch das Jahrbuch gegeben, τ' durch Rechnung, die mittlere Ortszeit T des Durchtritts durch die Beobachtung. Es ist also *derselbe* Zeitpunkt in Ortszeit T' und in Greenwichzeit $T_0 + \tau'$ gegeben, also ist

$$l = T_0 + \tau' - T$$

die westliche oder östliche Länge.

346. Die Schattengleichung ist quadratisch für τ', weil sie die beiden Fälle des Eintritts und Austritts umfafst, also zwei Werthe für τ' liefern mufs.

Die Auflösung der Schattengleichung erfolgt nun so. Man setzt:

$$m \sin M = x_0 - \xi, \qquad n \sin N = x'_0,$$
$$m \cos M = y_0 - \eta, \qquad n \cos N = y'_0,$$

wo m und n *positive* Zahlen bedeuten, und erhält:

$(x_0 - \xi + x_0' \tau')^2 = m^2 \sin^2 M + \tau'^2 n^2 \sin^2 N + 2 m n \tau' \sin M \sin N,$
$(y_0 - \eta + y_0' \tau')^2 = m^2 \cos^2 M + \tau'^2 n^2 \cos^2 N + 2 m n \tau' \cos M \cos N,$
also:

$$m^2 + \tau'^2 n^2 + 2 m n \tau' \cos (M - N) = k^2$$

oder:

$$\tau'^2 + \frac{2m}{n} \tau' \cos (M - N) = \frac{k^2 - m^2}{n^2}.$$

Die Auflösung ergibt:

$$\tau' + \frac{m}{n} \cos (M - N) = \mp \sqrt{k^2 - m^2 \sin^2 (M - N)}.$$

Da die linke Seite reell ist, so ist es auch die rechte, also ist der Radicand positiv, d. h. $k^2 > m^2 \sin^2 (M - N)$. Deshalb mufs es einen Winkel ψ des ersten oder zweiten Quadranten geben, für welchen

$$k \cos \psi = m \sin (M - N)$$

ist; für ein positives, bezw. negatives $\sin (M - N)$ wird ψ im ersten, bezw. zweiten Quadranten liegen. Diese Substitution liefert:

$$k^2 - m^2 \sin^2 (M - N) = k^2 - k^2 \cos^2 \psi = k^2 \sin^2 \psi$$

und

$$\tau' = - \frac{m}{n} \cos (M - N) \mp \frac{k}{n} \sin \psi.$$

Setzen wir hierin

$$\frac{m}{n} \cos (M - N) = \tau, \quad \frac{k}{n} \sin \psi = \Delta T,$$

so wird für Greenwicher M. Z.:

Eintritt $T_1 = T_0 - \tau - \Delta T,$
Austritt $T_2 = T_0 - \tau + \Delta T.$

347. Für den Zeitpunkt T_0 wird $\alpha = \alpha'$, weil die Stundenkreise von Stern und Mond zusammenfallen.

Es gehen also x, y in Nr. 344. über in:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \Delta \sin (\delta - \delta') = \frac{\sin (\delta - \delta')}{\sin \pi},$$

wenn π die äquatoriale Horizontalparallaxe des Mondes bedeutet. Folglich wird:

$$m \sin M = x_0 - \xi = - \varrho \cos \varphi' \sin (\vartheta - \alpha')$$
$$m \cos M = y_0 - \eta = \frac{\sin (\delta - \delta')}{\sin \pi} - \varrho \sin \varphi' \cos \delta'$$
$$- \varrho \cos \varphi' \sin \delta' \cos (\vartheta - \alpha').$$

Aus diesen Gleichungen gehen durch Einführung von

$$\varrho \cos\varphi' = c \cos\varphi, \qquad \varrho \sin\varphi' = s \sin\varphi$$

$$(\vartheta - \alpha')^0_{24} = t, \qquad \frac{\sin(\delta - \delta')}{\sin\pi} = q$$

die Gleichungen hervor:

$$m \sin M = - c \cos\varphi \sin t$$
$$m \cos M = - s \sin\varphi \cos\delta' + c \cos\varphi \sin\delta' \cos t + q;$$

dieselben unterscheiden sich von den im N. J., S. XVII, Nr. 2 gegebenen nur dadurch, daſs die Declination des Mondes mit δ' statt mit δ bezeichnet ist.

Die Einführung der geographischen Breite φ an Stelle der geocentrischen oder verbesserten Breite φ' ist eine Erleichterung für die Rechnung, weil man φ bereits kennen muſs und auch der Berechnung des Ortsradius ϱ überhoben wird; denn das N. J. liefert auf S. XVII. ein Täfelchen, aus welchem $\log c$ und $\log s$ entnommen werden können. Auſserdem besitzen die „Elemente der Sternbedeckungen" eine Spalte q, welche den Werth $q = y_0$ für den beobachteten Bedeckungsstern liefert.

Bezüglich $(\vartheta - \alpha')^0_{24} = t$, wo also ϑ die Sternzeit, t den Stundenwinkel des Sterns im Augenblick der Beobachtung bedeutet, wird daran erinnert, daſs ϑ aus der mittleren Zeit abgeleitet werden muſs; das N. J. liefert die Sternzeit $\vartheta_{0,0}$ des mittleren Mittags von Greenwich, und für den mittleren Ortsmittag ist $\vartheta_0 = \vartheta_{0,0} + l\,\Delta\alpha$; die Berechnung erfordert also die genäherte Kenntniſs der gesuchten Länge l.

Da m positiv ist und M durch $m \sin M$ und $m \cos M$ gegeben ist, so ist der Quadrant von M eindeutig bestimmt.

Die „Elemente der Sternbedeckungen" besitzen ferner eine Spalte für $\log n$ und N, so daſs nunmehr die Werthe m, M, n, N bekannt sind. Der Werth k des linearen Mondhalbmessers ist gleichfalls bekannt und sein Logarithmus gegeben durch $\log k = 9{,}4361 - 10$.

Demgemäſs lassen sich

$$\tau = \frac{m}{n} \cos(M - N), \qquad \Delta T = \frac{k}{n} \sin\psi$$

berechnen und hiermit die Greenwicher Zeiten des Ein- und Austritts:

$$T_1 = T_0 - \tau - \Delta T$$
$$T_2 = T_0 - \tau + \Delta T.$$

Da ferner die Beobachtungszeiten T'_1 und T'_2 bekannt sind, so wird die gesuchte Länge:

$$l = T_1 - T'_1, \quad l = T_2 - T'_2.$$

Sollte die gefundene Länge l von der für die Berechnung der Sternzeit angenommenen stark abweichen, so mufs die Rechnung mit Länge l wiederholt werden.

348. Ein näheres Eingehen auf die beste Anordnung der Rechnung ist an dieser Stelle überflüssig, weil auf S. XVIII. des N. J. ein Rechenbeispiel vollständig durchgeführt ist.

Es mag darauf aufmerksam gemacht werden, dafs die Verwerthung einer im N. J. gegebenen Sternbedeckung nicht für jeden Ort möglich ist. Die geographische Länge des Ortes entscheidet zunächst darüber, ob das Phänomen bei Tage oder bei Nacht eintritt; die geographische Breite entscheidet darüber, ob für den „parallaktischen" Mond überhaupt eine Bedeckung statthat.

Angaben über Auswahl und Vorausberechnung von Sternbedeckungen findet man u. a. in dem dreibändigen Werk *Lehrbuch der Navigation, herausgegeben vom Reichs-Marine-Amt. Berlin 1901.*

In jüngster Zeit hat Herr Dr. Stechert, Abtheilungsvorstand der Deutschen Sternwarte zu Hamburg und Mitarbeiter an dem vorstehend erwähnten Lehrbuch, in den Jahrespublicationen „Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte" folgende verdienstvolle Abhandlungen veröffentlicht, welche die Längenbestimmung durch Sternbedeckungen und Sonnenfinsternisse erleichtern:

1. Jahrgang 1896 „Tafeln für die Vorausberechnung der Sternbedeckungen".

2. Jahrgang 1899 „Die Vorausberechnung der Sonnenfinsternisse und ihre Verwerthung zur Längenbestimmung".

3. Hilfsgröfsen für die Berechnung der im Jahre ... (1900, 1901, 1902) stattfindenden Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen.

Berichtigungen und Zusätze.

---

1. Auf S. 45, Nr. 36., soll für Zeile 25 und 26 gesetzt werden:

„er ist jedem der beiden Nachbarwinkel supplementär und dem nicht-benachbarten Winkel (Scheitelwinkel) congruent."

2. Auf S. 76, Nr. 61. ist am Ende hinzuzufügen:

Es sind also jedem Werthe jeder trigonometrischen Function *zwei* Winkel zugeordnet. In praxi sind die zu bestimmenden Winkel oder Bogen meist concav, d. h. $< \pi$. In diesem Falle wird der Winkel stets eindeutig aus Cosinus, bezw. aus Tangens oder Cotangens bestimmt. Haben diese Functionen das Zeichen $+$, so ist der Winkel spitz; für das Zeichen — ist er stumpf. Dagegen bleibt die Zweideutigkeit bestehen, wenn der Sinus des gesuchten Winkels gegeben ist. Denn der Sinus eines Concavwinkels hat stets das Zeichen $+$, und es entsprechen ihm *zwei* Winkel, welche supplementär sind.

3. Auf S. 85, Nr. 65. Ende ist hinzuzufügen:

In praxi werden die Winkel im Gradmafs ausgedrückt; man mufs also in den gegebenen Formeln der ebenen Trigonometrie 180^0 an Stelle von π setzen.

4. Auf S. 141, Nr. 111., Zeile 8 bis 10 soll an Stelle der für den Gregorianischen Kalender gegebenen Definition gesetzt werden:

Von den Schaltjahren des Julianischen Kalenders werden im Gregorianischen Kalender diejenigen Säcularjahre Gemeinjahre, deren Jahreszahl nicht durch 400 theilbar ist.

Hierbei bedeutet Säcularjahr jedes Jahr, dessen Zahl ein Vielfaches von 100 ist.

5. Der sechste Abschnitt (S. 203 ff.), welcher von dem Universalinstrument (U. I.) handelt, enthält in Nr. 187. und 204. eine An-

gabe darüber, wie die Ablesung P des durch Strahl I der Abscissenaxe gelegten Höhenflügels f ermittelt wird. Die Kenntnifs der Ablesungszahl P ist von fundamentaler Bedeutung, weil aus P der Indexfehler i des Höhenkreises und aus i und der Ablesung die Zenitdistanz eines eingestellten Objectes abgeleitet wird.

Die nachstehende geometrische Betrachtung soll das in Nr. 204. Ausgesagte begründen; sie setzt ein U. I. voraus, welches einen beliebigen Aufstellungsfehler, einen Collimationsfehler c und einen Axenfehler i' besitzen darf, und zeigt, dafs die Ablesungen H_r und H_l des Höhenkreises, welche der Einstellung eines festen Objects bei K. R. und K. L. entsprechen, den Werth P in der Form $\frac{1}{2}(H_r + H_l) \pm 180^0$ liefern.

Der Fall des fehlerlosen und fehlerlos aufgestellten U. I. (Nr. 187.) ist in dieser Betrachtung enthalten.

Unter F wurde der Punkt der Axe II verstanden, von welchem der Collimationsstrahl f ausgeht. f beschreibt bei seiner Drehung um II einen Halbkegel, dessen Spitze der Punkt F, dessen Axe die Axe II ist. Dieser Halbkegel wird durch die Ebene μ der Axen I und II, welche sich im Mittelpunkt J des U. I. schneiden, in zwei congruente Theile R_0 und L_0 zerlegt, und zwar soll R_0 für ein in J befindliches Auge auf der rechten Seite von μ liegen. f hat den Winkelabstand $90^0 + c$ vom Strahl FJ der Axe II.

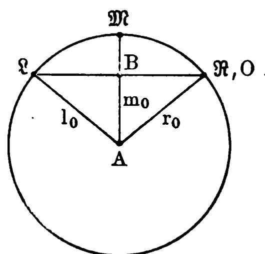
Die Ebeneflügel der Axe II hatten wir als Höhenflügel bezeichnet; der durch Strahl I der Abscissenaxe I bestimmte Höhenflügel soll der Flügel μ heifsen. Liegt f in μ, so soll P die Ablesung des Höhenkreises sein.

Es sei O ein Raumpunkt, welcher durch ein festes irdisches Object markirt ist. Mittels Drehung um Axe I kann R_0 durch O gelegt werden. Es sei $\mathfrak{R}$ der Punkt von R_0, welcher bei dieser Lage mit O zusammenfällt, und r der in R_0 gelegene Strahl $F\mathfrak{R}$. F_r sei der Raumpunkt, mit welchem F hierbei zusammenfällt. Durch Drehung um II kann f zur Coincidenz mit Strahl r gebracht werden; alsdann fällt f in den Strahl $F_r O$, d. h. O ist bei K. R. eingestellt, und es soll H_r die dadurch bestimmte Ablesung des Höhenkreises bezeichnen.

Durch den mit O zusammenfallenden Punkt $\mathfrak{R}$ der Fläche R_0 legen wir die Normalebene α der Axe II; ist A der Schnitt-

punkt beider, so wird die Kegelfläche R_0, L_0 von α in einem Kreise geschnitten, welcher durch $\mathfrak{R}$ geht und den Mittelpunkt A besitzt (Fig. 94). Der Flügel μ schneide die Ebene α in dem Strahl m_0. Das Loth von $\mathfrak{R}$ auf m_0 bestimme auf m_0 den Fufspunkt B und durch seine Verlängerung den Kreispunkt $\mathfrak{L}$. Wird der Strahl $A\mathfrak{R}$ mit r_0, der Strahl $A\mathfrak{L}$ mit l_0 bezeichnet, so liegen r_0 und l_0 symmetrisch zu m_0, und es ist $\angle(m_0, r_0) = \angle(m_0, l_0)$. Die durch r_0 und l_0 bestimmten Höhenflügel seien ϱ und λ; da ihre Kante II normal zur Ebene α der Strahlen r_0, l_0 liegt, so sind die Raumwinkel (μ, ϱ) und (μ, λ) den Ebenewinkeln (m_0, r_0) und (m_0, l_0) zugeordnet, d. h. es ist $\angle(\mu, \varrho) = \angle(\mu, \lambda)$. Die Flügel ϱ und λ liegen also symmetrisch zum Flügel μ. Der Strahl $F\mathfrak{R}$ von ϱ war mit r bezeichnet worden, entsprechend soll der Strahl $F\mathfrak{L}$ von λ mit l bezeichnet werden.

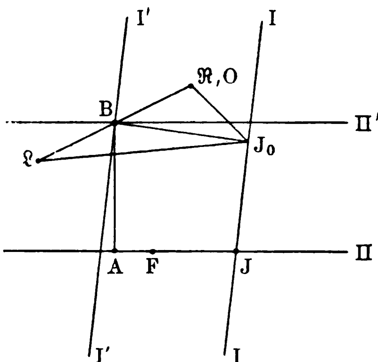
Fig. 94.



Die Dreiecke $FA\mathfrak{R}$ und $FA\mathfrak{L}$ sind congruent und bei A rechtwinklig, und es ist $\overline{F\mathfrak{R}} = \overline{F\mathfrak{L}}$.

Der drehbare Höhenflügel f kann successive durch Drehung um II zur Coincidenz mit Flügel ϱ, μ, λ gebracht werden; f erhält dadurch successive die Lagen $F\mathfrak{R} \equiv r$, $F\mathfrak{M}$, $F\mathfrak{L} \equiv l$; die den ersten beiden Lagen entsprechenden Ablesungen des Höhenkreises waren H_r und P; H_l soll das Entsprechende bedeuten, wenn f in λ liegt.

Fig. 95.



In Fig. 95 ist μ die Ebene der Zeichnung; es liegen also in letzterer sowohl die Axen I und II wie auch ihre durch B gelegten Parallelen I' und II'. Dagegen liegt die Gerade $\mathfrak{R}\mathfrak{L}$ normal zur Ebene der Zeichnung. II' ist die Normale der Ebene α im Punkte B; folglich liegt Gerade $\mathfrak{R}\mathfrak{L}$ normal zu II'; da $\mathfrak{R}\mathfrak{L}$ auch normal zu m_0 liegt, so ist $\mathfrak{R}\mathfrak{L}$ die Normale von μ im Punkte B.

Es sei BJ_0 das Loth von B auf I. Es liegt $\mathfrak{L}\mathfrak{R}$ normal zu I' als einer Geraden in μ, und BJ_0 normal zu I' $\neq$ I. Folglich ist I' die Normale der Ebene $\mathfrak{L}\mathfrak{R}J_0$ im Punkte B und I diese Normale im Punkte J_0.

Die Strahlen $J_0\mathfrak{L}$ und $J_0\mathfrak{R}$ liegen also normal zu I, ferner ist $\overline{J_0\mathfrak{L}} = \overline{J_0\mathfrak{R}}$, weil die Punkte $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{L}$ symmetrisch zu μ liegen; demgemäſs hat jeder Punkt der Ebene μ, z. B. J_0, von $\mathfrak{R}$ denselben Abstand, wie von $\mathfrak{L}$.

Durch Drehung um I kann also Strahl $\overline{J_0\mathfrak{L}}$ zur Deckung mit dem fest bleibenden Strahl $\overline{J_0 O}$ gebracht werden.

Vor der Drehung lag $\mathfrak{R}$ in O, nach der Drehung liegt $\mathfrak{L}$ in O und es geht nunmehr Strahl $F\mathfrak{L}$ durch O. Ist F_l der Raumpunkt, mit welchem F nach der Drehung zusammenfällt, so sind die Strahlen $F\mathfrak{L}$, $F_l O$ und l identisch. Der Collimationsstrahl f liegt vorläufig noch in r, sein Höhenflügel fällt mit ϱ zusammen, dessen Ablesung H_r ist. Durch Drehung um Axe II kann aber f nach l gebracht werden; dann fällt sein Höhenflügel mit λ zusammen, dessen Ablesung H_l ist; also liegt f auf L_0 und geht durch O, d. h. O ist bei K. L. eingestellt.

Wir sehen also, daſs, wenn dasselbe Object O bei K. R. und K. L. eingestellt wird, daſs alsdann die durch O bestimmten Höhenflügel ϱ und λ, d. h. die Flügel H_r und H_l, symmetrisch liegen zu dem Flügel μ des Strahles I, d. h. zu dem Flügel P.

Da der Höhenkreis normal und concentrisch liegt zur Axe II, so bestimmen die Flügel ϱ, λ daselbst ein Punktpaar $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{L}_0$, welches symmetrisch liegt zu dem durch Flügel μ bestimmten Punkt $\mathfrak{M}_0$, d. h. es ist:

$$\widehat{\mathfrak{M}_0\mathfrak{L}_0} = \widehat{\mathfrak{M}_0\mathfrak{R}_0}.$$

Da die Ablesungen wachsen, wenn Flügel f aus Lage H_l durch Flügel P in Lage H_r gedreht wird, so lassen sich die Werthe der Bogen $\widehat{\mathfrak{M}_0\mathfrak{L}_0}$ und $\widehat{\mathfrak{M}_0\mathfrak{R}_0}$ in folgender Weise aus den Ablesungen H_l, P, H_r ableiten.

1. Wird der Flügel $360^0 \equiv 0^0$ bei der Drehung überhaupt nicht passirt, so wird:

$$\widehat{\mathfrak{M}_0\mathfrak{L}_0} = P - H_l, \quad \widehat{\mathfrak{M}_0\mathfrak{R}_0} = H_r - P,$$

d. h.

$$P - H_l = H_r - P \text{ oder } P = \frac{1}{2}(H_r + H_l).$$

2. Liegt Flügel $360^0 \equiv 0^0$ zwischen Flügel H_l und P, so wird:

$$\widehat{\mathfrak{M}_0\mathfrak{L}_0} = 360^0 - H_l + P, \quad \widehat{\mathfrak{M}_0\mathfrak{R}_0} = H_r - P,$$

d. h.

$$360^0 - H_l + P = H_r - P \quad \text{oder} \quad P = \frac{1}{2}(H_r + H_l) - 180^0.$$

3. Liegt Flügel $360^0 \equiv 0^0$ zwischen Flügel P und H_r, so wird:

$$\widehat{\mathfrak{M}_0\mathfrak{L}_0} = P - H_l, \quad \widehat{\mathfrak{M}_0\mathfrak{R}_0} = 360^0 - P + H_r,$$

d. h.

$$P - H_l = 360^0 - P + H_r \quad \text{oder} \quad P = \frac{1}{2}(H_r + H_l) + 180^0.$$

Der Höhenkreis ist nun stets so adjustirt, dafs der Fall 1. für ein entferntes irdisches Object ausgeschlossen bleibt. Es ist also
$P = \frac{1}{2}(H_r + H_l) \pm 180^0$.

Instrumentale Ausrüstung für astronomisch-geographische, topographische, erdmagnetische und meteorologische Messungen auf Forschungsreisen.

Auf meiner Reise in den Andes von Chile und Argentinien habe ich die unter a) bis l) verzeichneten Instrumente verwandt und empfehle auf Grund der damit erreichten Resultate die Mitnahme gleichartiger Instrumente; die unter m), n), o) verzeichneten bilden eine wichtige Ergänzung.

a) Universalinstrument von Hildebrand mit fünfzölligen (= 13,5 cm Durchmesser) Kreisen und mikroskopischer Ablesung.

b) Sechszölliger Sextant.

c) Ein Reise-Magnetometer von Bamberg (Friedenau-Berlin) zur Bestimmung der erdmagnetischen Declination, Inclination, Horizontalintensität.

d) Ein Prismencompafs und gewöhnliche Taschenbussolen.

e) Zwei Quecksilberbarometer Fortin'schen Systems (stets vom Reisenden getragen).

f) Fünf Hypsothermometer nebst Kochapparat von Baudin (Paris) zur barometrischen Höhenmessung.

g) Drei Aneroide.

h) Eine Anzahl Baudin'scher Schwingthermometer.

i) Drei Präcisionsuhren.

k) Eine photographische Camera (Platten $16^1/_2 \times 12$ cm).

l) Eine zusammenschiebbare, röhrenförmige Stange von 6 m Länge für trigonometrische Basismessungen.

m) An Stelle des fünfzölligen Universalinstruments darf für Polhöhe- und Zeitbestimmungen treten:

Kleines Universalinstrument von Hildebrand (Freiberg i. S.), Höhenkreis 9,5 cm Durchmesser, Azimutalkreis 8 cm.

n) Für Sternbedeckungen (als Stativ dient das Stativ des U. I.) empfiehlt sich:

Fernrohr von Reinfelder und Hertel, München (oder von Merz oder von Steinheil, gleichfalls München), Oeffnung 2 Par. Zoll, Brennweite 20 Par. Zoll, Vergröfserung 60.

o) Sehr vortheilhaft ist die Mitnahme der von Professor Dr. Assmann erfundenen Aspirationsthermometer und -psychrometer (Fuess, Berlin); sie liefern die Temperatur der Luft und deren relativen Feuchtigkeitsgehalt in kurzer Zeit frei von den Einwirkungen der Sonnen- und Bodenstrahlung.

Auf die richtige Verpackung aller Instrumente kommt eben so viel an, wie auf deren Beschaffenheit. Rücksichten auf Gewichtserleichterung dürfen nie genommen werden, wenn die Sicherheit des Instrumentes darunter leiden könnte.

Anhang.

Hilfstafeln für Breitenbestimmungen.

Tafel I für $log \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \tau}{\sin 1''}$

τ	0^m	1^m	2^m	3^m	4^m	5^m	6^m	7^m	8^m	9^m
0^s	— ∞	0,2930	0,8951	1,2473	1,4971	1,6910	1,8493	1,9832	2,0992	2,2015
1	6,7367	3074	9023	2521	5008	6938	8517	9853	1010	2031
2	7,3388	3215	9094	2569	5043	6967	8541	9873	1028	2047
3	6910	3354	9165	2616	5079	6996	8565	9894	1046	2063
4	9408	3491	9236	2664	5115	7025	8589	9914	1064	2079
5	8,1347	3626	9305	2711	5150	7053	8613	9935	1082	2095
6	2930	3758	9375	2757	5186	7082	8637	9955	1100	2111
7	4269	3889	9443	2804	5221	7110	8660	9975	1117	2126
8	5429	4017	9511	2850	5256	7138	8684	9996	1135	2142
9	6452	4144	9579	2896	5291	7166	8708	2,0016	1153	2158
10	8,7367	0,4269	0,9646	1,2942	1,5326	1,7194	1,8731	2,0036	2,1171	2,2174
11	8195	4392	9713	2988	5361	7222	8754	0056	1188	2190
12	8951	4514	9779	3033	5395	7250	8778	0077	1206	2205
13	9646	4634	9844	3078	5430	7278	8801	0097	1224	2221
14	9,0290	4752	9909	3123	5464	7306	8824	0117	1241	2237
15	0889	4868	9974	3168	5498	7333	8848	0137	1259	2253
16	1450	4984	1,0038	3212	5532	7361	8871	0157	1276	2268
17	1976	5097	0102	3257	5566	7388	8894	0177	1294	2284
18	2473	5209	0165	3301	5600	7416	8917	0196	1311	2299
19	2942	5320	0228	3344	5633	7443	8940	0216	1329	2315
20	9,3388	0,5429	1,0290	1,3388	1,5667	1,7470	1,8963	2,0236	2,1346	2,2330
21	3812	5537	0352	3431	5700	7497	8985	0256	1364	2346
22	4216	5644	0413	3474	5733	7524	9008	0275	1381	2361
23	4602	5749	0474	3517	5766	7551	9031	0295	1398	2377
24	4971	5853	0534	3560	5799	7578	9054	0315	1415	2392
25	5326	5956	0595	3602	5832	7605	9076	0334	1433	2408
26	5667	6057	0654	3645	5865	7631	9099	0354	1450	2423
27	5995	6158	0714	3687	5897	7658	9121	0373	1467	2438
28	6310	6257	0773	3728	5930	7685	9144	0392	1484	2454
29	6615	6355	0831	3770	5962	7711	9166	0412	1501	2469
30	9,6910	0,6452	1,0889	1,3812	1,5994	1,7737	1,9188	2,0431	2,1518	2,2484

Tafel I für $log \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \tau}{\sin 1''}$

τ	0m	1m	2m	3m	4m	5m	6m	7m	8m	9m
30s	9,6910	0,6452	1,0889	1,3812	1,5994	1,7737	1,9188	2,0431	2,1518	2,2484
31	7194	6548	0947	3853	6027	7764	9211	0450	1535	2499
32	7470	6643	1004	3894	6059	7790	9233	0470	1552	2515
33	7738	6737	1061	3935	6090	7816	9255	0489	1569	2530
34	7997	6830	1118	3975	6122	7842	9277	0508	1586	2545
35	8249	6922	1174	4016	6154	7868	9299	0527	1603	2560
36	8493	7013	1230	4056	6185	7894	9321	0546	1620	2575
37	8731	7103	1285	4096	6217	7920	9343	0565	1637	2590
38	8963	7192	1340	4136	6248	7945	9365	0584	1653	2605
39	9189	7280	1395	4176	6279	7971	9386	0603	1670	2620
40	9,9408	0,7367	1,1450	1,4216	1,6310	1,7997	1,9408	2,0622	2,1687	2,2635
41	9623	7454	1504	4255	6341	8022	9430	0641	1704	2650
42	9832	7539	1558	4294	6372	8048	9451	0660	1720	2665
43	0,0037	7624	1611	4333	6403	8073	9473	0678	1737	2680
44	0236	7708	1664	4372	6433	8098	9495	0697	1753	2695
45	0432	0,7791	1717	4411	6464	8123	9516	0716	1770	2710
46	0622	7873	1769	4449	6494	8149	9537	0735	1786	2725
47	0809	7955	1822	4488	6525	8174	9559	0753	1803	2739
48	0992	8036	1873	4526	6555	8199	9580	0772	1819	2754
49	1171	8116	1925	4564	6585	8224	9601	0790	1836	2769
50	0,1347	0,8195	1,1976	1,4602	1,6615	1,8248	1,9623	2,0809	2,1852	2,2784
51	1519	8274	2027	4639	6645	8273	9644	0827	1869	2798
52	1687	8352	2078	4677	6675	8298	9665	0846	1885	2813
53	1853	8429	2128	4714	6704	8323	9686	0864	1901	2828
54	2015	8505	2178	4751	6734	8347	9707	0882	1918	2842
55	2175	8581	2228	4789	6764	8372	9728	0901	1934	2857
56	2331	8656	2277	4825	6793	8396	9749	0919	1950	2872
57	2485	8731	2327	4862	6822	8420	9770	0937	1966	2886
58	2636	8805	2376	4899	6851	8445	9790	0955	1982	2901
59	2784	8878	2424	4935	6881	8469	9811	0974	1998	2915
60	0,2930	0,8951	1,2473	1,4971	1,6910	1,8493	1,9832	2,0992	2,2015	2,2930

Tafel I für $\log \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \tau}{\sin 1''}$

τ	10^m	11^m	12^m	13^m	14^m	15^m	16^m	17^m	18^m	19^m
0^s	2,2930	2,3757	2,4513	2,5208	2,5852	2,6451	2,7011	2,7537	2,8034	2,8503
1	2944	3770	4525	5219	5862	6460	7020	7546	8042	8510
2	2959	3784	4537	5230	5872	6470	7029	7554	8050	8518
3	2973	3797	4549	5241	5882	6479	7038	7563	8058	8526
4	2987	3810	4561	5252	5893	6489	7047	7571	8066	8533
5	3002	3823	4573	5263	5903	6499	7056	7580	8074	8541
6	3016	3836	4585	5275	5913	6508	7065	7588	8082	8548
7	3030	3849	4597	5286	5924	6518	7074	7597	8090	8556
8	3045	3862	4609	5297	5934	6527	7083	7605	8098	8564
9	3059	3875	4621	5308	5944	6537	7092	7614	8106	8571
10	2,3073	2,3888	2,4633	2,5319	2,5954	2,6547	2,7101	2,7622	2,8114	2,8579
11	3087	3901	4645	5330	5964	6556	7110	7630	8121	8586
12	3102	3914	4656	5341	5975	6566	7119	7639	8129	8594
13	3116	3927	4668	5352	5985	6575	7128	7647	8137	8601
14	3130	3940	4680	5362	5995	6585	7137	7656	8145	8609
15	3144	3953	4692	5373	6005	6594	7146	7664	8153	8616
16	3158	3965	4704	5384	6015	6604	7154	7672	8161	8624
17	3172	3978	4716	5395	6025	6613	7163	7681	8169	8631
18	3186	3991	4727	5406	6036	6623	7172	7689	8177	8639
19	3200	4004	4739	5417	6046	6632	7181	7698	8185	8646
20	2,3214	2,4017	2,4751	2,5428	2,6056	2,6641	2,7190	2,7706	2,8193	2,8654
21	3228	4029	4763	5439	6066	6651	7199	7714	8201	8661
22	3242	4042	4774	5450	6076	6660	7208	7723	8209	8669
23	3256	4055	4786	5460	6086	6670	7216	7731	8216	8676
24	3270	4068	4798	5471	6096	6679	7225	7739	8224	8684
25	3284	4080	4809	5482	6106	6688	7234	7748	8232	8691
26	3298	4093	4821	5493	6116	6698	7243	7756	8240	8699
27	3312	4106	4833	5503	6126	6707	7252	7764	8248	8706
28	3326	4118	4844	5514	6136	6717	7261	7772	8256	8714
29	3340	4131	4856	5525	6146	6726	7269	7781	8264	8721
30	2,3353	2,4143	2,4867	2,5536	2,6156	2,6735	2,7278	2,7789	2,8271	2,8728

Tafel I für $log \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \tau}{\sin 1''}$

τ	10m	11m	12m	13m	14m	15m	16m	17m	18m	19m
30s	2,3353	2,4143	2,4867	2,5536	2,6156	2,6735	2,7278	2,7789	2,8271	2,8728
31	3367	4156	4879	5546	6166	6745	7287	7797	8279	8736
32	3381	4168	4891	5557	6176	6754	7296	7806	8287	8743
33	3395	4181	4902	5568	6186	6763	7304	7814	8295	8751
34	3408	4194	4914	5578	6196	6773	7313	7822	8303	8758
35	3422	4206	4925	5589	6206	6782	7322	7830	8310	8765
36	3436	4219	4937	5600	6216	6791	7331	7838	8318	8773
37	3449	4231	4948	5610	6226	6800	7339	7847	8326	8780
38	3463	4243	4960	5621	6236	6810	7348	7855	8334	8788
39	3477	4256	4971	5632	6246	6819	7357	7863	8341	8795
40	2,3490	2,4268	2,4982	2,5642	2,6255	2,6828	2,7365	2,7871	2,8349	2,8802
41	3504	4281	4994	5653	6265	6837	7374	7879	8357	8810
42	3517	4293	5005	5663	6275	6847	7383	7888	8365	8817
43	3531	4305	5017	5674	6285	6856	7391	7896	8372	8824
44	3544	4318	5028	5685	6295	6865	7400	7904	8380	8832
45	3558	4330	5039	5695	6305	6874	7409	7912	8388	8839
46	3571	4342	5051	5706	6314	6883	7417	7920	8396	8846
47	3585	4355	5062	5716	6324	6893	7426	7928	8403	8854
48	3598	4367	5073	5727	6334	6902	7435	7937	8411	8861
49	3611	4379	5085	5737	6344	6911	7443	7945	8419	8868
50	2,3625	2,4391	2,5096	2,5748	2,6354	2,6920	2,7452	2,7953	2,8426	2,8876
51	3638	4404	5107	5758	6363	6929	7460	7961	8434	8883
52	3651	4416	5118	5768	6373	6938	7469	7969	8442	8890
53	3665	4428	5130	5779	6383	6947	7477	7977	8449	8897
54	3678	4440	5141	5789	6392	6956	7486	7985	8457	8905
55	3691	4452	5152	5800	6402	6966	7495	7993	8465	8912
56	3705	4465	5163	5810	6412	6975	7503	8001	8472	8919
57	3718	4477	5175	5820	6422	6984	7512	8009	8480	8926
58	3731	4489	5186	5831	6431	6993	7520	8017	8488	8934
59	3744	4501	5197	5841	6441	7002	7529	8026	8495	8941
60	2,3757	2,4513	2,5208	2,5852	2,6451	2,7011	2,7537	2,8034	2,8503	2,8948

Tafel I für $\log \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \tau}{\sin 1''}$

τ	20m	21m	22m	23m	24m	25m	26m	27m	28m	29m
0s	2,8948	2,9372	2,9775	3,0161	3,0531	3,0885	3,1225	3,1553	3,1868	3,2172
1	8955	9379	9782	0167	0537	0891	1231	1558	1873	2177
2	8963	9385	9789	0174	0543	0896	1236	1563	1878	2182
3	8970	9392	9795	0180	0549	0902	1242	1569	1884	2187
4	8977	9399	9802	0186	0555	0908	1247	1574	1889	2192
5	8984	9406	9808	0193	0561	0914	1253	1579	1894	2197
6	8991	9413	9815	0199	0567	0919	1258	1585	1899	2202
7	8999	9420	9821	0205	0573	0925	1264	1590	1904	2207
8	9006	9427	9828	0211	0579	0931	1269	1595	1909	2212
9	9013	9433	9834	0218	0585	0937	1275	1601	1914	2217
10	2,9020	2,9440	2,9841	3,0224	2,0591	3,0942	3,1281	3,1606	3,1920	3,2222
11	9027	9447	9847	0230	0597	0948	1286	1611	1925	2227
12	9035	9454	9854	0236	0603	0954	1292	1617	1930	2232
13	9042	9461	9860	0243	0609	0960	1297	1622	1935	2237
14	9049	9468	9867	0249	0615	0965	1303	1627	1940	2242
15	9056	9474	9873	0255	0620	0971	1308	1633	1945	2247
16	9063	9481	9880	0261	0626	0977	1314	1638	1950	2252
17	9070	9488	9886	0267	0632	0983	1319	1643	1955	2257
18	9077	9495	9893	0274	0638	0988	1325	1648	1961	2262
19	9085	9502	9899	0280	0644	0994	1330	1654	1966	2267
20	2,9092	2,9508	2,9906	3,0286	3,0650	3,1000	3,1336	3,1659	3,1971	3,2272
21	9099	9515	9912	0292	0656	1005	1341	1664	1976	2277
22	9106	9522	9919	0298	0662	1011	1347	1670	1981	2281
23	9113	9529	9925	0305	0668	1017	1352	1675	1986	2286
24	9120	9535	9932	0311	0674	1023	1358	1680	1991	2291
25	9127	9542	9938	0317	0680	1028	1363	1685	1996	2296
26	9134	9549	9945	0323	0686	1034	1369	1691	2001	2301
27	9141	9556	9951	0329	0692	1040	1374	1696	2006	2306
28	9148	9562	9958	0336	0698	1045	1379	1701	2011	2311
29	9155	9569	9964	0342	0704	1051	1385	1707	2017	2316
30	2,9162	2,9576	2,9970	3,0348	3,0709	3,1057	3,1390	3,1712	3,2022	3,2321

Tafel II für $\log \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2} \tau}{\sin 1''}$

τ	0^s	τ	0^s	τ	0^s	τ	0^s	τ	0^s	τ	0^s
1^m	0,00	6^m	0,01	11^m	0,14	16^m	0,61	21^m	1,81	26^m	4,26
2	0,00	7	0,02	12	0,19	17	0,78	22	2,19	27	4,96
3	0,00	8	0,04	13	0,27	18	0,98	23	2,61	28	5,73
4	0,00	9	0,06	14	0,36	19	1,22	24	3,09	29	6,59
5	0,01	10	0,09	15	0,47	20	1,49	25	3,64	30	7,55

Verbesserungen.

S. XVIII, Z. 12 v. o.: „Differentialrechnung" statt „Differentialberechnung".
S. 3, Z. 6 v. o.: Hinter „Gerade" einschalten „(Nr. 34. 35.)".
S. 13, Z. 13 v. u.: $r_2 < r_1$ statt $r_2 < r$.
S. 33, Z. 14 v. u.: Die beiden Kommas fallen fort.
S. 34, Z. 13 v. u.: Das Komma fällt fort.
— Z. 5 v. u.: „congruente" fällt fort.
S. 37, Z. 19 v. u.: Das Semikolon fällt fort.
— Z. 18 v. u.: „und" an Stelle von „ebenso wollen wir".
— Z. 17 v. u.: „bezeichnen" fällt fort.
S. 43, Z. 14 v. u.: Hinter „sind" einschalten „(Nr. 37.)".
S. 44, Z. 19 v. o.: s statt r.
— Z. 5 v. u.: „Die cyklische" statt „Cyklische".
S. 45, Z. 25 und 26 zu ersetzen gemäfs S. 363, 1.
S. 46, Z. 14 v. u.: „Halbkreisschaar" statt „Halkreisschaar".
S. 49, Z. 10 und 12 v. o.: 9″8 statt 9,8″.
S. 50, Z. 5 v. u.: 360° statt 360, 24^h statt 24.
S. 51, Z. 13 v. o.: Das Komma fällt fort.
— Z. 17 v. o.: 90° statt 90.
S. 53, Z. 14 v. u.: Das Komma fällt fort.
S. 54, Z. 1 und 2 v. u.: 360° statt 360.
S. 55, Z. 2 und 3 v. o.: 24^h statt 24.
— Z. 14 v. u.: k und K vertauschen.
S. 59, Z. 16 v. o.: „welchen" statt „welchem".
— Z. 1 v. u.: „Nr. 43." statt „43."
S. 64, Z. 2 v. u.: „wo" statt „*wo*".
S. 76, Nr. 61 zu erweitern gemäfs S. 363, 2.
S. 81, Z. 17 v. u.: 180° statt 180.
— Z. 11 v. u.: „kleiner" statt „gröfser".
S. 85, Z. 1 v. o.: $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ statt $tg\,\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.
S. 85, Nr. 65 zu erweitern gemäfs S. 363, 3.
S. 89, Z. 3 v. o.: $(x - f)^2$ statt $(x - {}^2f)$.
S. 92, Z. 2 v. o.: 6356,079 statt 6356 . 079.
— Z. 4 v. o.: 6377,397 statt 6377 . 397.
— Z. 8 v. o.: 299,1528 statt 299 . 1528.
S. 93, Z. 8 v. u.: Zweimal „Verticalflügel" statt „Vertical".
S. 95, Z. 11 v. o.: 360° statt 360.
— Z. 15 v. o.: Das Komma fällt fort.

Verbesserungen.

S. 98, Z. 10 v. o.: Das Komma vor „und“ fällt fort.
S. 99, Z. 18 v. u.: „schliefslich“ hinter „er“.
S. 116, Z. 1 und 2 v. o.: Statt der Worte „liegt . . . . . Pol“ die Worte: „liegen der Sternparallel und Z“.
S. 125, Z. 5 v. u.: Statt „gleich der“ setzen „gleich dem Werth der“.
S. 130, Z. 5 und 11 v. o.: 366,2422 statt 366 . 2422.
S. 136, Z. 18 und 20 v. o.: 365,2422 statt 365 . 2422, 366,2422 statt 366 . 2422.
S. 141, Z. 8 bis 10 v. o. zu ersetzen gemäfs S. 363, 4.
S. 192, Fig. 64: α statt ϱ (Winkel Z).
S. 207, Z. 11 v. u.: Hinzufügen „Die Ablesungen wachsen rechts herum“.
S. 208, Z. 8. v. o.: Hinter „Lage“ einschalten „des Flügels k“.
S. 209, Z. 11 v. u.: Hinter A_r einschalten „(Nr. 178.)“.
S. 214, Fig. 68: Statt S_1 und z_1 setzen: S_r und z_r.
S. 216: An Stelle der Nr. 187. soll Zusatz 5 auf S. 363 bis 367 treten.
S. 225, Z. 16 v. u.: Hinter „Flüssigkeit“ hinzufügen „(Schwefeläther)“.
— Z. 15 v. u.: „Dampfblase“ statt „Luftblase“.
S. 239, Z. 10 v. u.: Hinter „gröfser“ setzen „, bezw. kleiner“.
— Z. 9 v. u.: Hinter „kleiner“ setzen „, bezw. gröfser“.
S. 247, Z. 13 v. o.: 0^s4 statt 0 4.
S. 260, Z. 13 v. u.: Ein Punkt am Ende der Zeile.
S. 279, Z. 14 v. o.: „$\vartheta^h + 2^h$“ fällt fort.
— Z. 17 v. u.: Hinter „die“ einschalten „scheinbaren“.
S. 280, Z. 15 v. o.: ζ_0' statt ζ_0.
S. 288, Z. 4 v. o.: $A'_{r,1}$ statt $A_{r,1}$.
— Z. 5 v. o.: $B'_{l,2}$ statt $B_{l,2}$.
S. 307, Z. 7 v. u.: Hinter α_m' ein Komma.
S. 327, Z. 2 v. u.: „Beobachtungssätze“ statt „Beobachtungen“.
S. 328, Z. 2 v. o.: „Baños“ statt „Banos“.
S. 331, Z. 11 v. u.: Hinter „zwei“ hinzufügen „beliebige“, hinter g ein Komma.
S. 341, Z. 15 v. o.: „(Nr. 319., 3)“ statt „(Nr. 312., 3.)“.
— Z. 10 v. u.: „Umformungen“ statt „Untersuchungen“.
S. 346, Z. 1 v. o.: „Nr. 326.“ statt „Nr. 319.“.
S. 351, Z. 3 v. u.: „Hierfür“ statt „Hieraus“.
S. 356, Z. 12 v. o.: Statt des zweiten T_0 setzen: „Das Zusammenfallen der Stundenkreise“.
S. 358, Z. 5 v. o.: „Ordinate“ statt „Declination“.
S. 359, Z. 7 v. o.: Statt „Z“ setzen: „der Coordinatenaxe Z parallel ist“.
— Z. 19 v. u.: Die Worte „ist parallel der Z-Axe und“ fallen fort.
S. 360, Z. 8 v. o.: Die rechte Seite der Gleichung lautet:

$$\mp \frac{1}{n} \sqrt{k^2 - m^2 \sin^2 (M - N)}.$$

— Z. 2 v. u.: Statt des ersten — tritt +.

S. 377, Z. 1: $\dfrac{2 \sin^4 \frac{1}{2} \tau}{\sin 1''}$ statt $\log \dfrac{2 \sin^4 \frac{1}{2} \tau}{\sin 1''}$.



